Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

SCHULPSYCHOLOGIE
BILDUNGSBERATUNG

Der schulische Umgang mit Rechenschwierigkeiten

Eine Handreichung

Der schulische Umgang mit Rechenschwierigkeiten

Eine Handreichung

Wien, 2023

Impressum

Medieninhaber, Verleger und Herausgeber:
Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung
Minoritenplatz 5, 1010 Wien
Tel.: +43 1 531 20-0
bmbwf.gv.at

Koordination und für den Inhalt verantwortlich
Beatrix Haller (BMBWF)
Zehra Gümüs (ÖZPGS)

Die Handreichung wurde 2008 erstmals von der Arbeitsgruppe „Dyskalkulie“ (Rechenschwäche) der Schulpsychologie-Bildungsberatung in Kooperation mit der Kirchlichen Pädagogischen Hochschule der Diözese Graz-Seckau (Hubert Schaupp) sowie der Entwicklungspsychologie der Universität Graz (Karin Landerl) publiziert.

Die vorliegende Ausgabe wurde durch folgende Autorinnen und Autoren überarbeitet:
Birgit Dünser (Schulpsychologie Vorarlberg)
Paule Dusseldorf (Schulpsychologie Tirol)
Albert Ellensohn (Schulpsychologie Salzburg)
Melanie Glaser (Schulpsychologie Steiermark)
Zehra Gümüs (ÖZPGS)
Beatrix Haller (BMBWF)
Karin Landerl (Universität Graz)
Angelika Lang (Schulpsychologie Niederösterreich)
Bettina Langenfelder (Schulpsychologie Oberösterreich)
Silvia Pixner (UMIT)
Martin Schöfl (BALDT)
Brigitte Thöny (Schulpsychologie Tirol)

Wir danken der Arbeitsgruppe der Schulpsychologie Österreich in Kooperation mit der KPH Graz und der Psychologie der Universität Graz für die fachliche Aufbereitung.

Diese Broschüre ist auch im Internet unter www.schulpsychologie.at verfügbar.

Gestaltung: BKA Design & Grafik
2. aktualisierte Auflage
Wien, 2023

Inhalt

Vorwort

Ein Unterricht, der mathematisches Verständnis ermöglicht und die Früherkennung von Rechenschwierigkeiten in den Mittelpunkt stellt, liegt in der Verantwortung der Schule. Erste Risikofaktoren sind bereits vor der Einschulung erkennbar. Bei der Schulreifefeststellung sollten daher die Vorläuferfertigkeiten – Zählen und Mengenstrukturierung – überprüft werden. Je früher Schwierigkeiten erkennbar sind, desto effektiver kann interveniert werden. Bei Bedarf sollten bereits in der ersten Klasse die betroffenen Schülerinnen und Schüler eine gezielte Förderung im Rahmen eines differenzierten und verstehensorientierten Unterrichts erhalten. Ein ermutigendes Lernumfeld erhält die Lernmotivation der Schülerinnen und Schüler, mindert Ängste und hilft, Vertrauen in die mathematischen Fähigkeiten aufzubauen.

Die Broschüre richtet sich an alle Schulpartner/innen und Interessierten am Thema Umgang mit Rechenschwierigkeiten in der Schule mit folgenden Zielsetzungen:

- Sensibilisierung im Umgang mit Schüler/inne/n mit Rechenschwierigkeiten
- Bundeseinheitliche Umsetzung im Umgang mit Schüler/inne/n mit Rechenschwierigkeiten
- Etablierung von Qualitätsstandards des Rechenunterrichts und der Förderung von Schüler/inne/n mit Rechenschwierigkeiten

Folgende Themen werden in der vorliegenden Handreichung erläutert:

- Das erste Kapitel gibt fundierte Informationen zur Entwicklung des kindlichen Rechnens. Zusätzlich wird in diesem Abschnitt auch die Bedeutung eines sprachsensiblen Fachunterrichts Mathematik beschrieben.

- Das zweite Kapitel enthält Informationen über die Entstehung von Schwierigkeiten beim Rechnenlernen sowie deren Erkennungsmerkmale.

- Das dritte Kapitel setzt sich mit dem Thema Diagnostik im Rahmen von Rechenschwierigkeiten auseinander. Im Fokus steht die frühzeitige Identifikation von Rechenschwierigkeiten und die Bedeutung der Förderdiagnostik in der Schuleingangsphase, der Grundstufe und im Sekundarbereich. Die Darstellungen einiger Fallbeispiele ermöglichen einen Einblick, wie in bestimmten Situationen vorgegangen werden kann.

- Das vierte Kapitel beschreibt die gesetzlichen Grundlagen der Leistungsfeststellung und Leistungsbeurteilung.

- Im fünften Kapitel werden Leitgedanken für den Umgang mit Rechenschwierigkeiten am Schulstandort als Diskussionsgrundlage zur Festlegung eines einheitlichen Umgangs mit Rechenschwierigkeiten vorgestellt.

- Das sechste Kapitel informiert über populäre didaktische Irrtümer im Rechenunterricht der Primarstufe.

- Das siebente Kapitel weist auf Qualitätskriterien als Entscheidungshilfe für außerschulische Förderangebote hin.

Die Schulpsychologie und die Schulaufsicht stehen als Ansprechpartner/innen für Lehrer/innen, Eltern und Schüler/innen für Beratung und Hilfestellung zur Verfügung. Die Kontaktadressen sind auf der Website www.schulpsychologie.at zu finden.

1 Die Entwicklung des kindlichen Rechnens

Ziel des ersten Kapitels ist es, die Entwicklung jener Prozesse darzustellen, die die Grundlage für flexibles Rechnen[1] bilden. Diese idealtypische Entwicklungsdarstellung soll helfen, die Probleme, die Kinder mit Rechenschwierigkeiten haben und welche inneren Modelle sie nicht ausreichend entwickeln können, zu verstehen.

Drei Zahlencodes

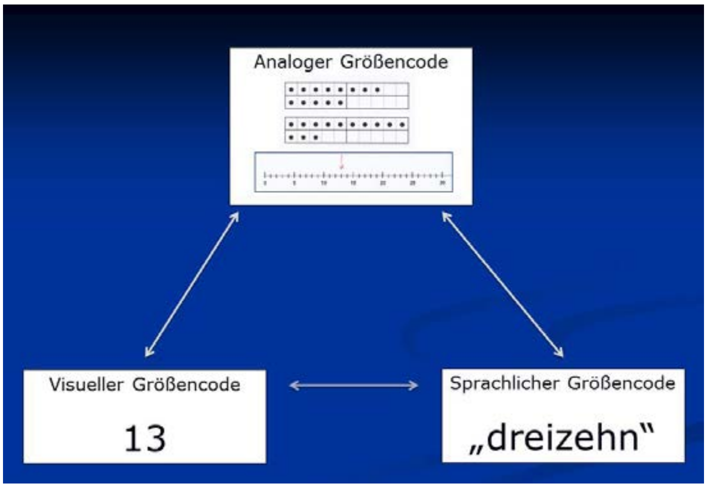
Es gibt drei unterschiedliche Repräsentationsformen von Zahlen und Mengen, die als Codes bezeichnet werden: der analoge, verbal-phonologische und visuell-arabische Zahlencode (Triple-Code-Modell, Dehaene, 2012).

(An)zahlen begegnen uns im Alltag in unterschiedlichen Formaten: Wenn auf dem Kuchenteller noch drei Stück Kuchen übrig sind, so nehmen wir die Mächtigkeit der Menge von Kuchenstücken (= drei) als **„analoge Größenrepräsentation“** wahr. Zahlen können auch als Zahlwörter verbal benannt werden („drei“) oder als **arabische Ziffern und Zahlen (3)** niedergeschrieben werden. Zahlwörter und arabische Zahlen fungieren als symbolische Darstellungsformen für analoge „Numerositäten“ in unserer Umwelt. Bei kompetenten Erwachsenen sind diese drei Zahlencodes (analog, verbal und visuell-arabisch) neurofunktional so eng miteinander vernetzt, dass sie stets gemeinsam automatisch aktiviert werden (Triple-Code Modell, Dehaene, 2012). Wir können die Ziffer 5 gar nicht wahrnehmen, ohne uns gleichzeitig der numerischen Bedeutung dieser Ziffer (also der analogen Größenrepräsentation der „Fünfheit“) bewusst zu sein. Diese hochautomatischen Aktivierungsprozesse sind bei Kindern noch nicht vorhanden, das neurofunktionale Netzwerk der Zahlenverarbeitung entwickelt sich erst im Lauf der Kindheit und basiert auf vielfacher Erfahrung mit den unterschiedlichen Zahlencodes.

---

1 „Flexibel“ Rechnen und „denkendes“ Rechnen sind Synonyme für gut entwickelte arithmetische Fähigkeiten der Grundschulzeit.

Triple-Code Modell
(Dehaene, 2012)



Ein Kernmechanismus der analogen Größenrepräsentation ist uns offenbar angeboren. Das „Micky-Maus-Experiment“ (Wynn, 1992) zeigt, dass Kinder ein frühes Verständnis von Mengenveränderungen zeigen. Sie verfügen über ein naives Grundverständnis für Addieren (= etwas hinzufügen) und Subtrahieren (= etwas wegnehmen). Selbst einfache „falsche Rechenprozesse“ werden bemerkt: Wenn zu einer Mickymaus-Figur durch einen Schirm verdeckt eine zweite Figur hinzugestellt wird, aber auch nach Entfernung des Abdeckschirms nur eine Figur sichtbar wird, dann sind bereits sechs Monate alte Babys irritiert.

Im Zuge des Spracherwerbs werden auch die ersten Zahlwörter erlernt. Diese werden anfangs meist ohne klaren Bezug zu den „analogen Mengenrepräsentationen“ benannt oder als Zahlwortsequenz („eins, zwei, drei“…) aufgesagt, ähnlich wie Kinderreime. Um Zählprozesse korrekt durchführen zu können, müssen Kinder eine Reihe von grundlegenden Zählprinzipien (Gelman & Gallistel, 1978) verstehen:

1. Prinzip der Eins-zu-eins Zuordnung: Jedem zu zählenden Objekt muss genau ein Zahlwort zugeordnet werden. Typische Fehler sind, dass ein Objekt doppelt oder gar nicht gezählt wird.
2. Prinzip der stabilen Abfolge: Die Zahlwörter werden in einer konsistenten Abfolge verwendet. Zählfehler treten auf, wenn Kinder die Zahlwortreihe noch durcheinander bringen („eins, zwei, drei, vier, sieben…“)[2].
3. Kardinalitätsprinzip: Das letzte Wort des Zählprozesses repräsentiert die Mächtigkeit (oder Kardinalität) der gezählten Menge. Manchmal ist es schwierig zu erkennen, ob Kinder dieses Prinzip bereits verstehen, auch wenn der Zählprozess

2 Zur Kenntnis der korrekten Zahlwortabfolge gehört später auch, dass Kinder die Zehner-Zahlwörter kennen und wissen, dass nach „neunund…“ jeweils der nächste Zehner zu benennen ist (typischer Fehler: „neunundzwanzig, zehnundzwanzig, elfundzwanzig…“)

an sich korrekt durchgeführt werden kann. Ist die Aufgabe, aus einer größeren Menge 5 Murmeln abzuzählen und fragt man dann: „Wo siehst du hier die 5 Murmeln?“ so zeigen Kinder, die das Kardinalitätsprinzip noch nicht erfasst haben, oft auf die fünfte Murmel (anstatt auf die Gesamtmenge der Murmeln).

Ein besonderer Zählprozess wird für kleine Anzahlen (bis vier Objekte) bereits von Kleinkindern verwendet: Ohne seriell-verbales eins-zu-eins-Abzählen kann die Anzahl auf einen Blick erfasst werden, daher benötigt das Zählen kaum länger, wenn vier als wenn ein oder zwei Objekte gezählt werden. Ab etwa fünf Objekten nimmt die Zeit, die für einen Zählprozess benötigt wird, stetig mit steigender Anzahl zu, weil ab dieser Anzahl entweder wirklich gezählt oder die Anzahl aus kleineren Teilmengen zusammengefasst werden muss. Dieser eher visuelle Zählprozess kleiner Anzahlen wird als Subitizing (lat. subito – sofort, geschwind) bezeichnet. Auch rechenschwache Kinder können diesen Prozess des Subitizings anwenden, aber er ist oft auf einen kleineren Zahlenraum (zwei oder drei Objekte) beschränkt, und bei exakter Messung der Reaktionszeiten kann man feststellen, dass der Prozess weniger effizient und damit geringfügig (um wenige Zehntelsekunden), aber signifikant langsamer abläuft (Schleifer & Landerl, 2011).

Auch einfache Rechenprozesse werden im Kindergartenalter bereits durchgeführt, wobei hier zumeist die Finger zum Nachzählen zu Hilfe genommen werden (Fingerrechnen). Dem Fingerrechnen kommt beim Aufbau der neurokognitiven Repräsentation von Zahlen eine wichtige Rolle zu (von Aster, Kaufmann, & Lipka, 2015): Im Gehirn sind Finger und Zahlen vermutlich nicht zufällig in benachbarten Arealen repräsentiert. Kinder mit Fingeragnosie (einer neurofunktionalen Störung, bei der Kinder nicht zuordnen können, an welchem Finger sie berührt werden, wenn sie ihre Hände nicht sehen können) haben häufig Probleme im Aufbau des Zahlenwissens und der Rechenleistung (Reeve & Humberstone, 2011). Deshalb sollten in der Vorschulstufe beim Aufsagen der Zahlwortreihe die dazu passenden Finger aufgeklappt werden. Fingerrechnen stellt also eine wichtige Grundlage für die Entwicklung differenzierterer Rechenleistungen dar und sollte im schulischen Mathematikunterricht keinesfalls zu früh unterbunden werden. Wenn Kinder Rechnungen auch ohne Zuhilfenahme der Finger lösen können, geben sie diese umständliche Strategie ganz von selbst zugunsten effizienterer Strategien auf (siehe auch Abschnitt zählendes Rechnen).

Auch arabische Ziffern sind Kindern in der Schuleingangsphase zum Teil bereits bekannt. Die Komplexitäten des Stellenwertsystems mehrstelliger Zahlen und das schriftliche Rechnen werden zumeist im schulischen Mathematikunterricht erworben. Das Stellenwertsystem ist eine Besonderheit des arabischen Zahlsystems, die zu seiner weltweiten Verbreitung führte: Mit nur zehn unterschiedlichen Ziffern (0 bis 9) können beliebig große Zahlen dargestellt werden. Der Erwerb des Stellenwertsystems birgt allerdings eine ganze Reihe von Stolpersteinen:

(1) Eine und dieselbe Ziffer hat in unterschiedlichen Positionen stark unterschiedliche numerische Bedeutung (z. B. 5, 52, 576, 5814, usw.).

(2) Die Ziffer „0“ bedeutet nicht „nichts“, vielmehr kommt ihr eine spezielle Funktion als Platzhalter zu: 502 hat eine völlig andere Bedeutung als 52. Es dürfen aber nicht alle Nullen von Zahlwörtern angeschrieben werden: Die Zahl „dreitausendfünfhundertzehn“ ist nicht anzuschreiben als 300050010, sondern als 3510, wobei der Platzhalter 0 der Tausender- und Hunderter-Zahl überschrieben werden muss. Auch die Zahl „achthundert“ ist nicht als 8100 dazustellen, obwohl doch 8 für „acht“ und 100 für „hundert“ steht.

(3) Zweistellige Zahlen stellen aufgrund der Zehner-Einer-Inversion eine besondere Herausforderung dar: Während im arabischen Zahlensystem erst der Zehner und dann der Einer angeschrieben wird, wird im deutschen Zahlwortsystem erst der Einer genannt und dann erst der Zehner (21 – „einundzwanzig“). Diese Inversion gilt ausschließlich für die Zehnerposition, bei der Hunderter- und Tausenderposition gibt es wiederum keine Inversion. In anderen Sprachen (z. B. Englisch) werden die Zehner meist vor den Einern benannt („twenty-one“) – tatsächlich passieren in diesen Sprachen auch die bei uns so häufigen „Zahlenverdreher“ deutlich seltener.

(4) Die ersten Zahlen der zweiten Dekade sind im deutschen Zahlwortsystem besonders intransparent: Aus den Zahlwörtern „elf“ und „zwölf“ geht nicht hervor, dass hier eine neue Dekade beginnt und 10 + 1 bzw. 10 + 2 gemeint ist. Erst bei „dreizehn“ wird aus der Wortform deutlich, dass hier eine „Zehn“ enthalten ist.

Aufgrund der Intransparenz des deutschen Zahlwortsystems für Zahlen zwischen 10 und 100 empfiehlt es sich, in der 1. und 2. Klasse auch Erfahrungen mit größeren Zahlen zu ermöglichen, um die Systematik mehrstelliger arabischer Zahlen zu verdeutlichen. Während der Zahlenraum fürs Rechnen altersgemäß beschränkt bleibt, kann das Stellenwertsystem auch für größere Zahlen bereits erarbeitet werden.

Aktuelle Befunde zeigen, dass ein kompetenter Umgang mit den symbolischen Zahlensystemen (bes. Stellenwertsystem) einen wichtigen Prädiktor für die späteren Rechenleistungen darstellt (z. B. Banfi et al., 2021). Kinder mit Rechenschwierigkeiten zeigen noch in der 2. Schulstufe massive Schwierigkeiten im Umgang mit zweistelligen Zahlen (Landerl, 2013). Zu einem Zeitpunkt, zu dem laut Lehrplan bereits das Einmaleins intensiv geübt wird, fehlt diesen Kindern häufig noch das grundlegende Verständnis für das Stellenwertsystem. Wie dieses Verständnis erarbeitet werden kann, wird weiter unten dargestellt.

Zählen und Mengenstrukturierung

Für die Entwicklung mathematischer Fähigkeiten im Grundschulalter sind die Prozesse des **Zählens** und der **Mengenstrukturierung** grundlegend. Beide folgen eigenen Entwicklungslinien und entwickeln sich immer wieder von einer konkreten Tätigkeit ausgehend über die sprachliche Reflexion und den kommunikativen Austausch weiter (vgl. Fthenakis, 2014).

Beispiel
Kinder, die häufig zählen, fragen sich am Ende der ihnen bekannten Reihe, wie es da weitergehe. Über die Erfahrung, dass dann eine größere Zahl folgt, kann die Frage entstehen, ob das immer so weitergehe. Dadurch, dass es immer eine noch größere Zahl gibt, egal wie lange man zählt, wird das Konzept des Unendlichen erfahrbar.

Die Entwicklungslinie des Zählens basiert auf dem ordinalen Zahlenaspekt (die Zahlen als Reihenfolge), die der Mengenstrukturierung auf dem kardinalen Zahlenaspekt (die Zahlen als Anzahlen, die Reihenfolge und Position der Zahlen können variabel strukturiert werden). Diese Entwicklungen verlaufen niemals streng vorwärts, sondern durchaus in Fort- und Rückschritten sprunghaft und spiralförmig, sodass sich die Lernenden immer wieder auf anderem Niveau an ähnlicher Stelle wiederfinden.

Beispiel
Das Prinzip des Zerlegens der Zahlen im Zahlenraum 10 (7 besteht aus 5 und 2) wird bei der Strukturierung des Zahlenraums 100 auf höherem Niveau wieder verwendet (21 besteht aus zwei Zehnern und einem Einer), oder auch in der Struktur der Multiplikation (56 besteht aus 7 Achtern).

Die beiden Entwicklungslinien können zwar einzeln gezeichnet werden, durchdringen sich gegenseitig aber von Anfang an, und der **flexible Wechsel** zwischen den Aspekten macht erst die Erweiterung der Zahlenräume und auch eine größere Abstraktion und Tiefe der Erkenntnis möglich.

Beispiel
Ein Kind, das eine ungeordnete Menge von 8 Elementen zählt, wechselt vom ordinalen (Zählvorgang) in den kardinalen Modus (Anzahl der Menge), wenn es bei der Nennung des Ergebnisses erfasst, dass die Zahl 8 die Mächtigkeit der Menge benennt.

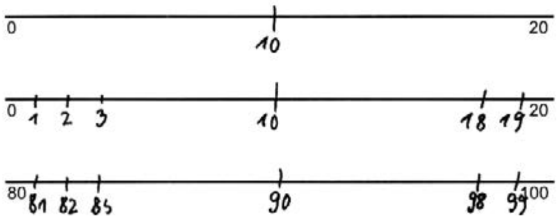
Parallel zur wahrscheinlich ersten systematischen Beschäftigung mit dem Rechnen ab dem Schulanfang werden von den Kindern mannigfache alltagsmathematische Erfahrungen gemacht: Eine Tafel Schokolade gerecht auf zwei Personen aufzuteilen, auf den Geburtstag eine Woche zu warten, beim Tischdecken gleich viele Messer und Gabeln aufzulegen, mit anderen Kindern zu vergleichen, wer mehr Muscheln gesammelt hat, Taschengeld zu verwalten, in der Küche beim Abwiegen und -messen der Zutaten zu helfen, die eigene Körpergröße zu messen, „Mensch ärgere Dich nicht", Tierquartett, Lotto oder Mühle zu spielen, (Lego) zu bauen mit und ohne Bauplan, Puzzles zu legen, etc. Je nachdem, wie intensiv solche Erfahrungen ermöglicht werden und wie über diese Erfahrungen gesprochen wird, verstehen Kinder die Bedeutung von Zahlen und Operationen in der Umwelt. Deshalb ist die systematische spielerische Beschäftigung zur Förderung der mathematischen Vorläuferfähigkeiten im Kindergarten sehr empfehlenswert.

Zählendes Rechnen

Mit entsprechender Übung werden die Zählleistungen eines Kindes flexibler. So kann etwa die Zahlenreihe von verschiedenen beliebigen Ausgangspunkten fortgesetzt werden und die Zahlenreihe auch rückwärts aufgesagt werden. Über das häufige Abzählen von Mengen wird resultatives Zählen erworben. Die Zahlenreihe, die aufgesagt wird, verknüpft sich hier mit der Anzahl einer Menge, die am letzten gesprochenen Wort dieser Reihe abgelesen wird. Das Kind, das auf die Aufforderung 7 Finger zu zeigen, zuerst die eine Hand ganz zeigt und dann mit „6 und 7" 2 Finger der anderen Hand, macht diese Verknüpfung auch.[3] Die innere Vorstellung beim Zählen besteht zunächst aus einer Abfolge von Wörtern („nach 39 kommt 40"), deren stabile Abfolge dann als lineare Ausbreitung – als mentaler Zahlenstrahl – repräsentiert wird. Das Aufsagen der Zahlenreihe bedeutet noch nicht, dass den Kindern bewusst ist, dass die Reihe immer um 1 steigt. Vielmehr weisen Forschungsbefunde (Überblick bei Landerl, Vogel & Kaufmann, 2022) darauf hin, dass die Zahlen am mentalen Zahlenstrahl logarithmisch komprimiert sind, was bedeutet, dass die Abstände zwischen den Zahlen als größer empfunden werden, je kleiner diese Zahlen sind. So erscheint der Abstand zwischen 3 und 8 größer zu sein als der Abstand zwischen 203 und 208).

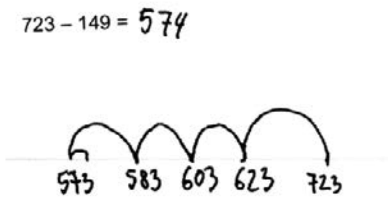
Die Positionen der einzelnen Zahlen und deren Verhältnis zueinander differenzieren diesen Zahlenstrahl immer mehr und machen ihn als lineares inneres Modell abstrakt anwendbar.

3 Wittmann spricht in diesem Zusammenhang vom „rechnenden Zählen", das Strukturen – wie eben hier die ganze Hand des Kindes – nützt, um sich das Zählen zu erleichtern und in weiterer Folge zu ersparen. Er sieht die Bewusstmachung dieser Vorgänge als wichtigsten Schritt zu nicht zählenden Rechenstrategien.



Ausdifferenzierung des Zahlenraumes – Strukturgleichheit

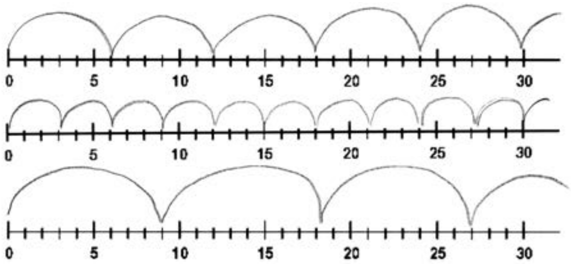
Logische Folgen in der Zahlenreihe (z. B.: 1-3-4-6-7-9-10 …) und Zählen in Schritten größer als 1 (2er, 5er und 10er Schritte) stärken die Orientierung und machen Abkürzungen möglich. Auf dem mentalen Zahlenstrahl sind sie als Sprünge … vorstellbar (was bereits ein wichtiger Vorgriff auf die Multiplikation ist). Kopfrechnungen können am Zahlenstrich verdeutlicht werden. So wird kommunizierbar, was sich im Zahlenraum beim Rechnen ereignet, was sich wiederum verstärkend auf die Fertigkeiten im Kopfrechnen auswirkt.



Innere Vorstellung konkreter Rechenschritte auf Papier verdeutlicht „minus 100, minus 20, minus 20, minus 10 plus 1“ als eine Variante, wie das gerechnet wird.

Mit Zählen kann man auch Rechnungen lösen, wenn man die Zahlenreihe vorwärts (+) oder rückwärts (-) abschreitet. Kinder im Kindergartenalter machen das ganz selbstverständlich, wenn sie ein Rechenproblem im Alltag lösen wollen. Wenn es jedoch dauerhaft beim zählenden Rechnen bleibt, Schulkinder also Ergebnisse nur zählend ermitteln können, wird der ordinale offenbar nicht zum kardinalen Zahlenaspekt erweitert[4]. Zusammenhänge und Strukturen können ordinal nicht gebildet werden, und Zählvorgänge jenseits des Zahlenraums 10 werden langwierig und fehleranfällig. Rechenstrategien, wie z. B. das sehr oft in Schulen gelehrte und geübte „Weiterzählen“, führen bei Kindern, die nicht „von selbst“ die Verflechtung mit den kardinalen Aspekten herstellen können, zu „verfestigtem zählenden Rechnen“, einem Hauptsymptom bei Rechenschwäche.

Der innere Zahlenstrahl spielt auch in der dynamischen Auffassung der Multiplikation (als Wiederholung gleich großer Sprünge) eine Rolle. Zusammenhänge zwischen einzelnen Malreihen strukturieren den Zahlenraum weiter.



Zusammenhang zwischen 6er, 3er und 9er Ergebnissen

4 Rechenschwache Kinder sind nicht zählende Rechner, weil sie besonders gut zählen können, sondern weil sie nichts anderes können als zählen.

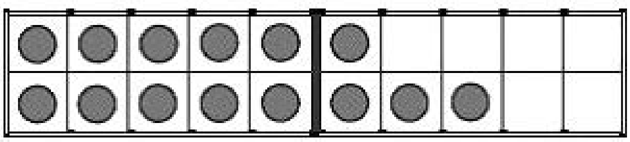
Mengenstrukturierung

Über das „rechnende Zählen“ (Wittmann, 2011) gelingt es zu verstehen, dass Anzahlen wiederum aus Anzahlen flexibel zusammengesetzt sind. Dabei ist es nicht das Ziel, dass sich Kinder merken, dass „8 aus 5 und 3 besteht“, sondern, dass sie verstehen, dass 8 nur in Beziehung zu anderen Zahlen einen eindeutigen Sinn hat: „es besteht sowohl aus 5 und 3, als auch aus 6 und 2, 7 und 1, 8 und 0 etc.“. Die Einsicht in dieses Teil-Teil-Ganzes-Konzept ist ein „Meilenstein“ in der Entwicklung mathematischer Kompetenzen (vgl. Häsel-Weide, Nührenbörger, Moser Opitz & Wittich, 2014). Dieses Konzept besteht im Prinzip darin, dass größere Zahlen in kleinere zerlegt und kleinere zu größeren zusammengesetzt werden können. Eine lineare Anordnung von Elementen, (z. B.: ●●●●●●●● für 8) ist wenig hilfreich, um die Teil-Ganzes Relationen der Menge zu erfassen. Andere Anordnungen, z. B. ●●●● ●●●● oder ●●● ●●●●● erleichtern das Erfassen der Teilmengen von 8.

Für erste strukturierende Mengenerfahrungen können z. B. Spielwürfel gut genützt werden, die zunächst als ganze Bilder gemerkt, dann aber auch in ihre Untermengen zerlegt werden können. Dieser Prozess kann angeregt werden, indem man Kinder fragt, woher sie wissen, was ein bestimmtes Würfelbild bedeutet. („Das sind 6, weil doch in jeder Reihe 3 sind!“) Auch die Unterschiede zwischen den Zahlen können hier optisch erkannt und benannt werden. („Bei 5 ist noch ein Punkt in der Mitte zum Vierer dazu“.)

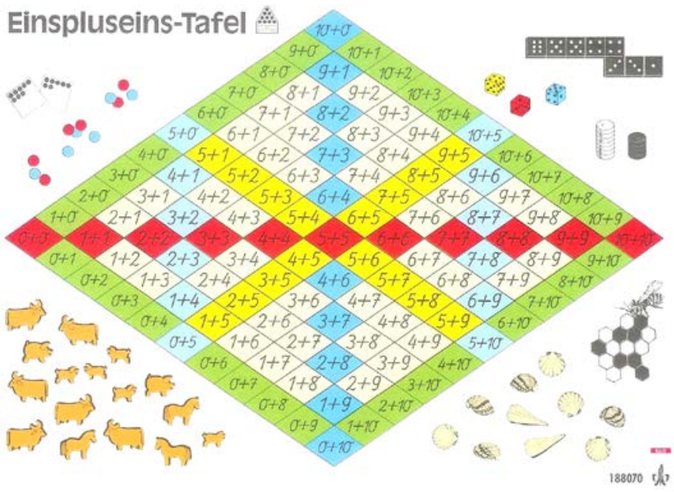
Im schulischen Kontext spielt von Anfang an die Verwendung geeigneter Erarbeitungsmittel eine entscheidende Rolle, wenn es um die Erarbeitung und Erweiterung des Zahlenraumes geht. Besonders hilfreich sind Materialien, die das dekadische Grundprinzip unseres Zahlensystems betonen: die Finger, das Zwanzigerfeld, der Abakus etc. Zum geeigneten Material muss aber auch der richtige Umgang mit den Erarbeitungsmaterialien hinzukommen, denn jedes Material kann zum reinen Abzählen der Elemente benützt werden, was zwar zuverlässig zu richtigen Ergebnissen führt, den Aufbau von strukturierten Modellen aber verhindert. Indem Kinder gefordert werden, über die Strukturen nachzudenken, diese zu kommunizieren und selbst kreativ ähnliche Strukturen zu erfinden, entsteht konzeptuelles statt bloß prozedurales Wissen.

„Wie heißt diese Zahl? Woraus besteht diese Zahl? Welche Rechnungen kann man hier sehen?“



Zahlen werden in Beziehungen und nicht nur als Ergebnis von Zählprozeduren gedacht, wodurch die Rechenoperationen in ähnliche, zusammenhängende Gruppen geordnet werden können: die Zahlennachbarn (+1), die Verdoppelungen, die „(Hand-)Zerlegungen“ zu 5 oder zu 10, die „Partnerzahlen“, die zusammen 10 ergeben, schließlich der strukturelle Zusammenhang zwischen Addition, Subtraktion und Ergänzung (vgl. Zeidl-Steiner, 2012).

Diese Gruppierungen analoger Darstellungen bringen Ordnung in den Zahlenraum 20. Strukturierte Anschauungsmaterialien helfen Kindern, diese Strukturen mit der Zeit zu automatisieren. Von diesen ersten Automatisierungen können Nachbaraufgaben abgeleitet werden. Für die Herstellung von dauerhaften Automatisierungen im kleinen 1+1 sind Ableitungsstrategien von entscheidender Bedeutung (vgl. Gaidoschik, 2010).



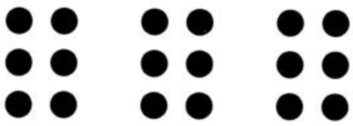
Die Struktur des Zahlenraums 20 mit allen 121 Plusrechnungen

Rot: Verdoppelungen
Blau: Partnerzahlen
Grün: +0, +10, +1
Gelb: Kraft der 5

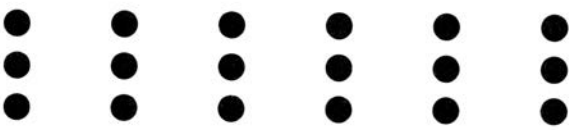
In schräg angrenzenden Kästchen ist jeweils die Summe um 1, in horizontal benachbarten um 2 verschieden, Kästchen übereinander haben dieselbe Summe.

Wenn nicht mehr tatsächlich gerechnet werden muss, sondern die Zahlen-Tripel (z. B.: 8-5-3) aus dem Langzeitgedächtnis für Additionen und Subtraktionen im Zahlenraum 20 abgerufen werden können, sind Rechenfakten für das kleine 1 + 1 entstanden. Dieses Wissen kann in weiterer Folge genutzt werden, die strukturellen Übereinstimmungen in größeren Zahlenräumen zu entdecken und darauf zurückzugreifen.

Das Teil-Teil-Ganzes-Konzept ist wichtig für das Verstehen des Dezimalsystems und der statischen Auffassung der Multiplikation / Division als einer rechteckigen Anordnung der Elemente.

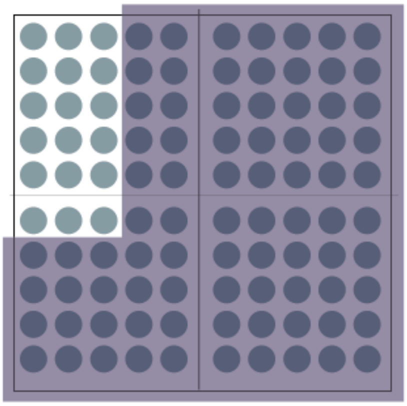


3 × 6 und 18 : 3
statisch – kardinal

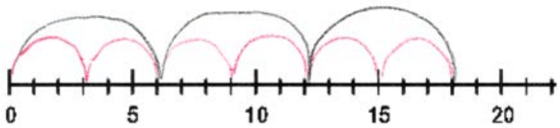


6 × 3 und 18 : 6
statisch – kardinal

3×6 oder 6×3 und
18:3 oder 18:6
statisch – kardinal



3×6 oder 6×3
dynamisch – ordinal



Verständnis für Rechenoperationen

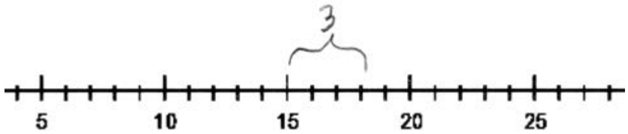
Wie bereits erwähnt, verfügen bereits Kleinkinder über ein Basisverständnis für Rechenoperationen: zu einer Menge wird bei der Addition etwas dazu gegeben, bei der Subtraktion wird etwas weggenommen. Das entspricht ganz den kindlichen Sachsituationen, wenn etwas vermehrt oder vermindert wird. Im schulischen Mathematikunterricht soll dieses Verständnis anhand des Erfassens des Teil-Teil-Ganzes-Konzepts erweitert werden: Addition zeigt sich hier als die Vereinigung zweier Mengen, Subtraktion als die Abtrennung einer Teilmenge vom Ganzen. Zur dynamischen Sichtweise (hinzugeben, wegnehmen) kommt also eine statische Sichtweise der Zahlenstruktur: Addition und Subtraktion sind in einem Bild fassbar, indem die Bewegung der Elemente nur gedacht wird: in der strukturierten Zahl.[5]

Beispiel: in  kann man leicht u. a. 3 + 5 und 8 – 3 zeigen.

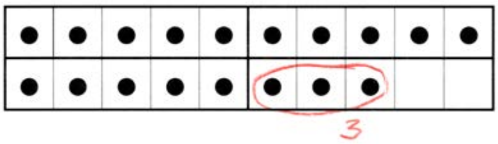
Beim Ergänzen und Vergleichen kommt eine Vorstellung zum Einsatz, die als neuer Zahlenaspekt gebildet wird: die Relationalzahl. Diese ist sowohl ordinal als auch kardinal zu deuten, weil sie ordinal den Abstand zwischen zwei Zahlenpositionen und kardinal den

5 Operationen und Zahlen sind also sehr eng verzahnt. Das eine kann das andere ausdrücken.

Unterschied zwischen zwei Mengen bezeichnet. („Von 15 fehlen 3 auf 18, zu 15 müssen 3 hinzukommen, damit es 18 sind.“) [6]



Ordinal



Kardinal

Die Semantik der Operationen wird anknüpfend an die vorschulischen Rechenerfahrungen der Kinder und in der kontinuierlichen Bearbeitung von kindlichen Sachsituationen gefestigt[7]. Die Kinder verknüpfen ihre täglichen Erfahrungen mit mathematischen Strukturen und erleben, wie Muster und Strukturen wiederum ihr Sachwissen über ihre Welt erhöhen. In der Bearbeitung von Textaufgaben wird beim „Modellieren“ auf die Semantik der Zahlen und Operationen zugegriffen – es wird der „Umweg“ über die analoge Mengenvorstellung genommen. Aufgaben sollten aber nicht – wie traditionell üblich – stets im verbalen Code (“Auf dem Spielplatz sind 4 Kinder. …“) formuliert werden, sondern auch vom visuell-arabischen Code („Wie sieht 3 + 4 = 7 im Material aus?“ „Mache zu 3 + 4 = 7 eine passende Rechengeschichte!“), oder dem analogen Code ausgehen („Wie kann man •••• als Rechnung aufschreiben?“ „Mach dazu eine passende Rechengeschichte für deine Mitschülerinnen und Mitschüler!“). Textaufgaben können insbesondere auch genutzt werden, um ein fortgeschrittenes Zahlverständnis zu entwickeln, das über die reine Zählfunktion hinausgeht. „Sandra hat vier Kaugummis mehr als Timo“ bezeichnet keine konkrete Menge (Kardinalität), sondern eine Relation von zwei Mengen, einen Abschnitt auf dem Zahlenstrahl (Stern, 1998).

Nun kommen auch die ersten Rechengesetze ins Spiel. Für die Addition reichen in der Grundschule zwei Rechengesetze aus: das Vertauschungsgesetz [a + b = b + a] und das Verbindungsgesetz [a + (b + c) = (a + b) + c]. In dieser formalen Fassung sind diese Gesetze erst in der Sekundarstufe relevant, sie beherrschen aber schon das Rechnen der untersten Stufe, wenn sie „operativ“ im Rechnen als Tätigkeit gedeutet werden (vgl. Wittmann, 2011). Dies gelingt, wenn die in diesen Gesetzen verborgenen Handlungen an

6 Diese stets zumindest doppelt interpretierbaren Modelle stellen ein entscheidendes Hindernis für rechenschwache Kinder dar, die immer alles schematisch erklärt bekommen (wollen).

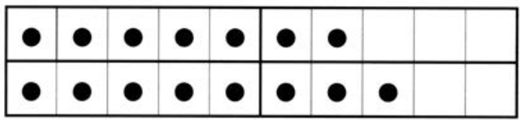
7 In traditionellen Rechenbüchern kommen Textaufgaben sehr oft in Form der eingekleideten Aufgabe vor, in der das gerade gelernte Rechenkapitel in mehr oder weniger geeigneten Sachsituation geübt wird. Das für die mathematische Entwicklung so wichtige Modellieren findet so aber gerade nicht statt.

geeigneten Zahlendarstellungen entdeckt werden. Die Anwendung des Vertauschungsgesetzes ist sehr einfach durch Platzwechsel bei einer strukturierten Zahlendarstellung zu erreichen und dient der Vereinfachung der Vorstellung sehr ungleicher Summanden. (Beispiel: 2 + 8 ist schwerer vorstellbar als 8 + 2). Es gilt bei Addition und Multiplikation. Das Verbindungsgesetz erlaubt drei verschiedene Interpretationen, die für das Verständnis der Zusammenhänge zwischen Rechnungen entscheidend sind:

Das Verbindungsgesetz erlaubt drei verschiedene Interpretationen, die für das Verständnis der Zusammenhänge zwischen Rechnungen entscheidend sind:

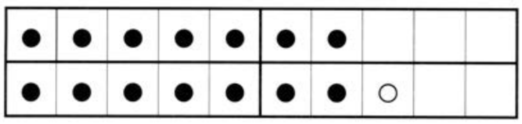
- Eine Summe kann schrittweise berechnet werden, indem Mengen in Untermengen zerlegt und anders wieder zusammengesetzt werden. [Beispiel: 7 + 8 = (5 + 2) + (5 + 3) = (5 + 5) + (2 + 3) = 10 + 5 = 15] (Zehnerübertritt mit der Kraft der 5)

Zehnerübertritt mit der Kraft der 5



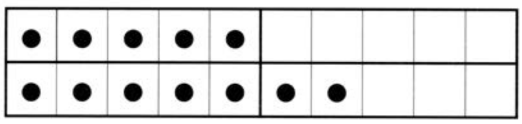
- Wenn ein Summand um einen bestimmten Wert erhöht wird, wird die Summe um den gleichen Wert erhöht. [Beispiel: 7 + 8 = 7 + (7 + 1) = (7 + 7) +1 = 14 + 1 = 15] (Ableitung einer Zehnerüberschreitung aus der Verdoppelung)

Ableitung einer Zehnerüberschreitung aus der Verdoppelung



- Wenn ein Summand auf Kosten des anderen Summanden erhöht wird, bleibt die Summe gleich. [Bespiel: 7 + 5 = (7 – 1) + (5 + 1) = 6 + 6] (gegensinniges Verändern)

Gegensinniges Verändern



Die operative Anwendung dieser Rechengesetze, die Nutzung zur Vereinfachung von Rechenwegen und die sich daraus ergebende Perspektive, schwierige Rechnungen nach Möglichkeit aus einfachen Rechnungen zu entwickeln, hilft bei der Vertiefung des „denkenden“ Rechnens (Wittmann, 2011), das in der Vergangenheit nur für die Mathematiktalente unter den Schulkindern reserviert schien. Gerade Kinder, die sich mit dem Rechnen schwerer tun, fahren mit den Werkzeugen, die in der Natur der Mathematik liegen, am besten (vgl. Gaidoschik, 2010). Reflexion und Kommunikation über Zusammenhänge in produktiven Übungsformaten und herausfordernden Aufgaben[8] und das Verstehen der Rechenwege anderer Kinder aktivieren die inneren Vorstellungen. Mechanisches Üben von formalen Rechnungen leistet dies nicht.

In der Multiplikation / Division lernen die Kinder einen bisher unbekannten Zahlenaspekt kennen: die Zahl als Operator. Anders als bisher gewohnt stellen die geschriebenen Ziffern nicht mehr ausschließlich eine Menge („Wie viele?"), sondern einen Vorgang („Wie oft?") dar. (Bei 3 + 5 ist mit 3 die Anzahl gemeint, zu der die Anzahl 5 dazu gegeben wird. Bei 3 × 5 ist mit 3 die Wiederholung gemeint, wie oft die Anzahl 5 genommen wird). Das kleine 1 × 1 gehört zu den Kernbereichen des rechnerischen Faktenwissens (Gaidoschik, 2015), weil dessen Automatisierung (spätestens Mitte der 3. Schulstufe) eine Voraussetzung für das Verständnis der Division und der Brüche darstellt und schriftliche Rechenverfahren ermöglicht. Die Kernaufgaben der Multiplikation, die Verdoppelung, die Verzehnfachung und die Verfünffachung (über das Halbieren) sind relativ leicht vorstellbar und damit gut zu merken[9]. Die anderen Aufgaben können und sollten über Ableitungsstrategien erarbeitet werden. Zum Beispiel können Kinder 9 × 7 als 10 × 7 – 1 × 7 ableiten. Voraussetzung dafür sind die Automatisierung von Addition, Subtraktion und Zerlegung im Zahlenraum 10 und Einsicht in das Dezimalsystem und Strategien für Stellenüber- und Stellenunterschreitungen.

Das Dividieren stellt die Umkehrung des Multiplizierens dar und analog zur Unterscheidung von Multiplikator und Multiplikand gibt es zwei Grundformen: Das Verteilen („24 Karten werden an 6 Kinder gerecht verteilt, wie viele Karten erhält jedes Kind?") und das Aufteilen („24 Karten werden verteilt, jedes Kind bekommt 4 Karten. An wie viele Kinder kann man austeilen?")

Dezimalsystem

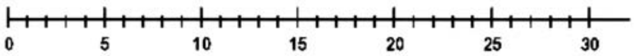
Das arabische Zahlen- / Ziffernsystem beruht auf dem Prinzip, dass an einer Stelle höchstens 9 stehen darf. Jeweils 10 einer Stelle werden zu einer 1 eine Stelle höher gebündelt. (Beispiel: aus 10 Einern wird 1 Zehner, aus 10 Hundertern wird 1 Tausender). Um mit beliebig großen Zahlen umgehen zu können, bedarf es des sicheren Umgangs mit den Zahlen bis einschließlich 10 und vor allem der Einsicht in die Funktionsweise des Stellenwertsystems (vgl. Gaidoschik, 2007). Den Kindern tritt das Dezimalsystem zuerst in Form der zweistelligen Zahlen entgegen, bei denen nun deutlich zwischen

8 Entgegen dieser Maxime bestehen die meisten Aufgaben in Rechenbüchern in Dingen, „die bereits gelernt" sind und in Übungseinheiten unzusammenhängender formaler Übungen.

9 Tatsächlich werden oft noch flächendeckend die „Malreihen" der Reihe nach direkt auswendig gelernt. Weil wir Erwachsene es so gelernt haben, besteht weitgehend die Meinung, die Malreihen müssten eben auswendig gelernt werden.

Ziffern und Zahlen unterschieden werden muss. (Beispiel: 12 besteht aus den Ziffern 1 und 2, aber aus den Zahlen 10 und 2). Diese Unterscheidung gelingt, wenn Kinder den Bündelungsgedanken verstanden und auch verallgemeinert haben. Ohne diese Verallgemeinerung stellt die Bündelung an größeren Stellen für viele wieder eine neue Hürde dar. Sie müssen verstehen, dass nicht nur 10 Einer 1 Zehner sind, sondern dass jede Stelle größer mal 10 bedeutet. Die Darstellungsmittel und inneren Vorstellungen sind wieder ordinal und kardinal organisiert: Ordinal der Zahlenstrich und die Hundertertafel, kardinal das Hunderterfeld und für die Stellenwerte speziell das Systemmaterial[10], das die Bündelung dreidimensional erfahrbar macht. 10 Einerwürfel ergeben eine Zehnerstange, 10 Zehnerstangen ergeben eine Hunderterplatte, 10 Hunderterplatten ergeben einen Tausenderwürfel, 10 Tausenderwürfel ergeben eine Zehntausenderstange etc. (Wenn der Einerwürfel wie üblich 1 cm Seitenlänge hat, dann kann man sich die Million als einen Würfel von 1 m Seitenlänge und die Milliarde als einen Würfel von 10 m Seitenlänge vorstellen.)[11] Stellenwerttafeln verdeutlichen die stabile Ordnung des Systems (Beispiel: $1347 = 1 \times 1000 + 3 \times 100 + 4 \times 10 + 7 \times 1$), fördern das stellengerechte Schreiben und bereiten auf die schriftlichen Rechenverfahren vor.

Zahlenraum 30

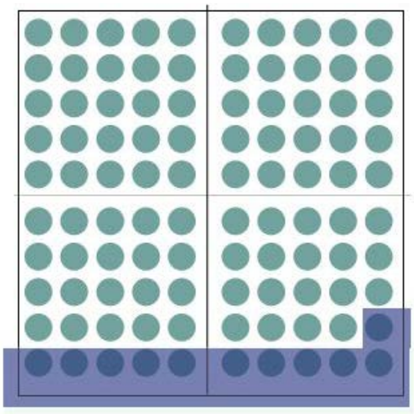


Das Muster der Dreierreihe auf der Hundertertafel

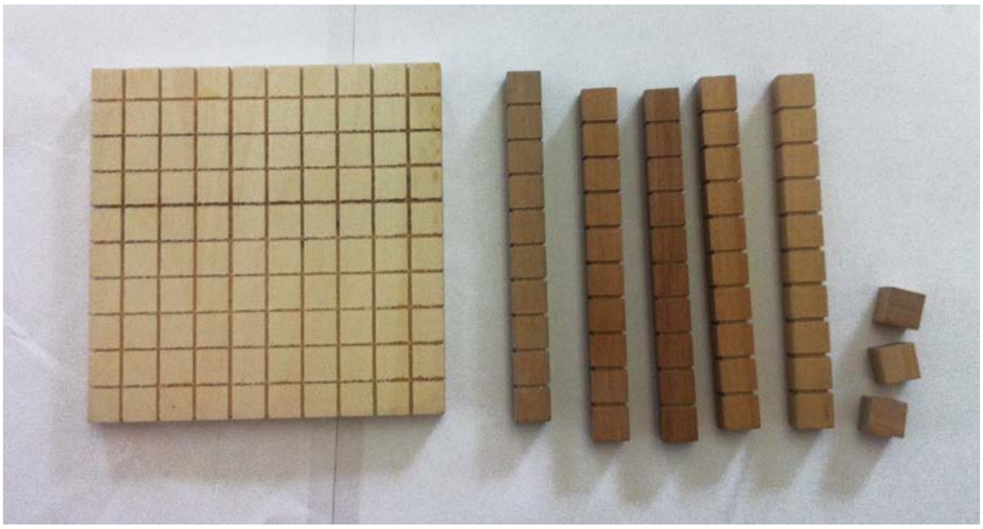
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

10 Dienes Systemmaterial (von Zoltan Paul Dienes 1916 – 2014, ungarisch-englischer Mathematiker)

11 Die ordinalen Veranschaulichungen eigenen sich besonders für die Verortung der Zahlen und für das Sichtbarmachen von Mustern. Die kardinalen Veranschaulichungen sind für das Rechnen essentiell, kann man damit doch den Mengenaspekt der Zahlen und die Rechenvorgänge sehr gut veranschaulichen. Hier sei noch einmal darauf verwiesen, dass sich nummerierter Zahlenstrahl und Hunderterfeld als Veranschaulichung von Rechenvorgängen nur für zählendes Rechnen eigenen und sie damit das, was in Rechenbüchern als ihr Zweck vorgegeben wird, nämlich das Rechnen zu erleichtern, nicht erfüllen.



89 auf dem Hunderterfeld



Dienes Systemmaterial „153“

H	Z	E
•	•••••	•••

Stellenwerttafel „153“

Schriftliche Rechenverfahren

Ab der 3. Klasse werden Kinder mit den standardisierten Algorithmen der schriftlichen Rechenverfahren vertraut gemacht. In der traditionellen Sichtweise gelten diese als die „Krönung des Rechenunterrichts“ (Krauthausen, 1993). Der Wert dieser Standardverfahren liegt in der Erleichterung, der größeren Schnelligkeit und Sicherheit beim Rechnen mit großen Zahlen, weil nur mit (kleineren) Ziffern gerechnet wird und die Ausführung des Gesamtverfahrens in wiederholter Anwendung der immer gleichen elementaren Rechenschritte besteht. Die quantitative Bedeutung der Zahlen wird erspart und muss erst wieder im Ergebnis interpretiert werden. Dieser Vorteil ist in der herkömmlichen Unterrichtspraxis zugleich ein Nachteil. Indem oft auf kürzestem Weg die formalen Algorithmen

„beigebracht" werden und diese dann als Verhaltensanweisung über fast zwei Schuljahre mechanisch geübt, kontrolliert und wieder geübt werden, können diese Verfahren sogar zu „kognitiver Passivität" bei den Kindern führen, die die Vorstellungsneutralität der Rechenschritte auf das Rechnen an sich ausdehnen. Sie können diese Verfahren, die jeweils genormt sind [12], für das „eigentliche" Rechnen halten, bei dem es nichts zu verstehen gilt, aber die strengen Vorschriften genau einzuhalten sind (Mathematik hat vielleicht auch deswegen allgemein den Ruf, formal, undurchschaubar und streng zu sein). Wie bei den „Rechenfakten" (das 1 + 1 im Zahlenraum 20 und das kleine 1 × 1) sind bei den formalen Algorithmen und Rechenprozeduren aufgrund des Ziffernrechnens keine inneren Modelle tätig, außer die in der Gedächtnisfunktion gespeicherten Abfolgen der Rechenschritte und die im Arbeitsgedächtnis verankerten Zwischenergebnisse, Überträge etc. Wie deutlich das konzeptuelle Verständnis für Rechenoperationen und die Beherrschung von Rechenprozeduren divergieren können, zeigen Beobachtungen an brasilianischen Straßenkindern, die schnell und effizient das Wechselgeld berechnen konnten, wenn sie Obst an Touristen verkauften, aber an denselben Aufgaben kläglich scheiterten, wenn sie als schriftliche Rechnungen mit mehrstelligen Zahlen präsentiert wurden (Carraher, Carraher & Schliemann, 1985).

Was in herkömmlicher Unterrichtspraxis oft nur als Vorstufe zu den schriftlichen Verfahren gilt, ist für die mathematische Entwicklung der Kinder von großer Bedeutung: das **halbschriftliche Rechnen** und das **Kopfrechnen**. Statt ausschließlich mit Ziffern wird bei diesen Verfahren mit Quantitäten im Zahlenraum operiert, und schon zeigt sich wieder die Vielfalt der Lösungswege, die bewegliches Denken unterstützt (vgl. Wittmann & Müller, 1992). Kopfrechnen unterscheidet sich von den halbschriftlichen Verfahren durch die explizite Notierung der Rechenwege beim halbschriftlichen Rechnen. Die Hauptstrategien bei der Addition sind „Stellenwerte extra", „Schrittweise" und „Vereinfachen", bei der Subtraktion kommt noch „Auffüllen" dazu. Dabei ist es nicht Sinn des Unterrichts, alle diese Strategien explizit beizubringen, sondern die Kinder sollen sich die beim Kopfrechnen je nach Ausgangszahl und individueller Vorliebe flexiblen Vorgänge selbst bewusst machen und über das Vergleichen mit den Lösungen anderer Kinder die Zusammenhänge im Zahlenraum verstehen. Nach und nach können sich gemäß dem Prinzip der fortschreitenden Schematisierung besonders geeignete Verfahren herausbilden.

12 Wenn sich auch beim Blick über die Grenzen zeigt, dass diese Verfahren durchaus jeweils„anders" genormt sind. Beispiel: Subtraktion mit Abziehverfahren in Norddeutschland, mit Ergänzungsverfahren in Bayern. Im Lehrplan der Volksschule 2023 sind beide Varianten erlaubt.

Veranschaulichung der Addition mit Ergebnis 614	Definition des Rechenverfahrens
479 + 135 = 500 + 100 + 14 = 614 **400 + 100 = 500** **70 + 30 = 100** 9 + 5 = 14	Addition „Stellenwerte extra“
479 + 135 = 614 479 + 100 = 579 579 + 30 = 609 609 + 5 = 614 479 + 135 = 614 479 + 30 = 509 509 + 100 = 609 609 + 5 = 614	Addition „Schrittweise“ (es gibt mehrere Varianten)
479 + 135 = 614 480 + 134 500 + 114	Addition „Vereinfachen“

In den diversen halbschriftlichen Strategien können die Kinder die Gesetzmäßigkeiten anschaulich entdecken, auf die auch die schriftlichen Algorithmen zurückgreifen.[13]

Mathematik und Sprache

Parallel zu den Konzepten der Zahlen und Operationen wird auch die mathematische (Fach-)Sprache entwickelt. Zur Alltagssprache kommen in der Schule die Bildungssprache und mathematische Fachsprache hinzu. Sowohl im Dialog mit anderen als auch zur inneren Klärung der eigenen Gedanken braucht es sprachliche Möglichkeiten zum Definieren und Erklären (Ferko 2016) von Ideen, Lösungswegen, Fehlern und Begründungen. (z.B: „Eine Zahl ist dann größer, wenn sie mehr Elemente enthält als eine andere.“ „Wenn ich bei zwei Zahlen von der einen eins abziehe, während ich bei der anderen eins dazugebe, bleibt die Summe aus den beiden Zahlen gleich.“)

Im Lehrplan der Volksschule 2023 wird vermerkt: „Die Schülerinnen und Schüler erfahren in vielfältigen Lehr- und Lernumgebungen Mathematik auch als Sprache, in der sie sich ausdrücken und mit der sie mit anderen in Austausch treten.“ Im Kompetenzmodell der 2009 eingeführten Bildungsstandards ist einer von vier Prozessen „Kommunizieren[14] und Begründen[15]“. (BGBl. II Nr. 47/2023 vom 15. Februar 2023)

13 Eine Relativierung der schriftlichen Verfahren zugunsten der halbschriftlichen Strategien und des Kopfrechnens wird von der Mathematikdidaktik seit dem Projekt Mathe 2000 (1991 in Dortmund) gefordert.

14 Kommunizieren meint das Darstellen und Interpretieren mathematischer Sachverhalte unter Nutzung altersadäquater Fachsprache und geeigneter Repräsentationsformen sowie das Beschreiben und Vergleichen von Denk-und Vorgangsweisen bzw. Lösungswegen (ebd.)

15 Begründen meint das Aufzeigen und Nutzen von Zusammenhängen, insbesondere das Klären, ob ein Lösungsweg richtig oder falsch ist. (ebd.)

Mathematische Fachsprache in der Volksschule umfasst ca. 500 spezifische Begriffe (Verboom, 2008). Diese haben über die Grundschuljahre hinaus in den weiterführenden Schulen Bedeutung und werden immer weiter ausdifferenziert, z. B.

- Fremdwörter: Addition, Differenz, multiplizieren, symmetrisch, …
- Wörter, die in der Alltagssprache einen anderen Sinn haben: Eine größere Zahl bedeutet etwas ganz anderes als eine größere Ziffer.
  Obwohl es einen rechten Winkel gibt, gibt es keinen linken Winkel.
  Das Gegenteil einer geraden Zahl ist keine schiefe Zahl.
  Ein Glatter Zehner ist nicht rutschig.
- Nonverbal: mathematische Symbole, Formeln und Grafiken:
  Viele Kinder glauben, das Gleichheitszeichen (=) bedeutet, dass man „rechts daneben das Ergebnis hinschreiben muss" (das basiert auf einem schematischen Einlernen der Addition), das zu großen Schwierigkeiten beim Ergänzen führt.

Die Auseinandersetzung mit der Sprache ist im Unterricht Lernziel/Lerngegenstand (siehe Lehrplan 2023), Sprache ist ein Lernmedium, das erst eine gemeinsame Basis in der Klasse zum Austausch über mathematische Belange herstellt und individuelles Nachdenken ermöglicht, sie ist aber auch eine mögliche Lernhürde und das nicht nur für Kinder mit einer anderen Erstsprache als Deutsch. (vgl. Götze, 2015)

Was bedeutet das für einen sprachsensiblen Fachunterricht in der Volksschule?

Sprachförderung im Fachunterricht findet in drei großen Bereichen statt:

- Fachwortschatz aufbauen
- Sprachverständnis sichern
- Mathematische Kommunikation fördern

Da die Sprachförderung immer an und mit mathematischen Inhalten und Aufgaben stattfindet, unterstützt sie gleichzeitig das mathematische Lernen. Die Sprache der Lehrperson nimmt bei der Sprachförderung eine zentrale Rolle als Sprachvorbild ein. Gezielte Impulse und beiläufige sprachliche Korrekturen (Scaffolding) unterstützen die Kinder dabei, den mathematischen Wortschatz auch zu verwenden. Zum Aufbau des Wortschatzes braucht es Plakate (Wortspeicher), die die aktuell benötigten Wörter grafisch verdeutlichen. Diese werden ergänzt mit Redemitteln (… ist größer als …, wenn ich … dazu gebe, … etc.), die die Kinder aktiv für ihre Gesprächsbeiträge nutzen (Götze & Hang 2017).

Auch das Anlegen eines Mathematik-Vokabelheftes, das über die Volksschulzeit weitergeführt werden kann, ist sinnvoll. Darin wird der bereits verstandene Fachwortschatz entweder beschrieben oder zeichnerisch dargestellt, um die Wörter dauerhaft präsent zu haben oder bei Notwendigkeit nachschauen zu können.

Es ist evident, dass Sprachförderung in einem kompetenzorientierten, aktiv entdeckenden Unterricht[16] sinnvoller durchzuführen ist als in einem lehrerzentrierten auf das Üben von Rechnungen ausgelegten Unterricht (darauf basiert auch das Vorurteil, dass Mathematik ein spracharmes Fach sei).

Konkrete Unterstützung mit Unterrichtsanleitungen, Materialien und theoretisch-didaktischen Einordnungen findet man unter: https://pikas.dzlm.de/ , https://mahiko.dzlm.de/ und https://pikas-mi.dzlm.de/.

Literatur

Banfi, C., Clayton, F.J., Steiner, A.F., Finke, S., Landerl, K., & Göbel, S.M. (2022). Transcoding-counts: Longitudinal contribution of number writing to arithmetic in different languages.

BMBWF (2023). Lehrplan der Volksschule. (BGBl. II Nr. 47/2023 vom 15. Februar 2023)

Ferko, L. (2016). Sprache, Denken und Mathematik. Ein Unterrichtskonzept zur Förderung literaler Handlungskompetenz im Mathematikunterricht. Diplomarbeit. Graz 2016

Götze, D. (2015). Sprachförderung im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen

Götze, D., Hang, E. (2017). Das Zahlenbuch. Förderkommentar Sprache zum 1. Schuljahr. Stuttgart: Ernst Klett VerlagJournal of Experimental Child Psychology, 223, 105482. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2022.105482

Häsel-Weide, U., Nührenbörger, M., Moser Opitz, E. & Wittich, C. (2014). Ablösung vom zählenden Rechnen. Fördereinheiten für heterogene Lerngruppen (2. Aufl.). Seelze: Klett Kallmeyer

Journal of Experimental Child Psychology, 223, 105482. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2022.105482

Landerl, K., Vogel, S.E. & Kaufmann, L. (2022). Dyskalkulie: Modelle, Diagnostik, Intervention (4. überarbeitete u. erweiterte Auflage). München: Ernst Reinhardt UTB

Verboom, L. (2008). Mit dem Rhombus nach Rom. Aufbau einer fachgebundenen Sprache im Mathematikunterricht der Grundschule. In: Banski, Ch. / Krüger-Potratz, M. (Hrsg.): Handbuch Sprachförderung. Essen: Neue Deutsche Schule Verlagsgesellschaft, S. 95–112

16 Der Mathematikunterricht der Primarstufe ist aktiv-entdeckend und fokussiert auf mathematische Zusammenhänge, Muster und Strukturen“ (Lehrplan 2023)

2 Schwierigkeiten beim Rechnenlernen

Begriffe: Rechenschwäche, Dyskalkulie, Rechenstörung

Wie bereits angesprochen, starten Kinder mit unterschiedlichen Voraussetzungen in den Rechenerwerb. Diese Unterschiede sollten erkannt und daraus abgeleitete differenzierte Maßnahmen/Lernangebote eingeleitet werden – unabhängig davon, ob eine Diagnose einer Rechenstörung vorliegt oder nicht. Kinder gelten im schulischen Bereich also dann als rechenschwach, wenn sie trotz adäquater Förderung und angemessenen Bemühens in ihrem kindlichen Denken mangelhafte Vorstellungen, fehlerhafte Denkweisen und dadurch ungeeignete Lösungsmuster für die mathematischen Grundlagen wie Zahlenaufbau und Grundrechenarten entwickeln. Rechenerwerbsschwierigkeiten treten in unterschiedlichen Ausprägungsgraden und Erscheinungsbildern auf und sind in etwa gleich häufig wie Lese-/Rechtschreibschwierigkeiten: Entsprechend den S3-Leitlinien leiden 2–8 % der Schülerinnen und Schüler an einer Rechenstörung. Der Anteil der Schülerinnen und Schüler mit Rechenschwäche ist mit ca. 23 % (Fischbar et al. 2013) viel höher ausgeprägt.

Die detaillierte Auflistung der Symptomatik in der Grundstufe wird weiter unten angeführt. Die Bezeichnung „Schwierigkeiten beim Rechnenlernen" wird daher als synonym zu den Begriffen Rechenschwäche, Rechenstörung und Dyskalkulie verwendet, wenn es um differenzierte Lernangebote und individualisierte Unterstützungsmaßnahmen geht. In der vorliegenden Handreichung wird folgende Begriffsdefinition präferiert. Auch wenn diese Begriffe synonym verwendet werden, sollte betont werden, dass die Ausprägung – also die Schwere der Betroffenheit – sehr unterschiedlich sein kann. Manche Kinder benötigen wenige Hilfestellungen, um die Kompetenzen zu erwerben, diese wären eher im Bereich der Rechenschwäche anzusiedeln, andere wiederum benötigen ganz viel Unterstützung und schaffen es trotz mehrfacher Wiederholung nicht, den aktuellen Stoff zu begreifen. Dies würde eher in die Richtung einer Rechenstörung (ICD-10/ICD-11) gehen. Und dazwischen liegen noch viele weitere Abstufungen in den Leistungsmöglichkeiten einzelner Kinder. Zusammenfassend muss also gesagt werden, dass auch dann, wenn die Begriffe im schulischen Bereich synonym verwendet werden, eine sehr differenzierte und individualisierte Vorgangsweise im Unterricht und in der Förderung, wie auch im Lehrplan angemerkt, vorzunehmen ist.

In Bezug auf die Leistungsbeurteilung ist immer das aktuelle Rundschreiben einzubeziehen.

Entstehung von Schwierigkeiten beim Rechnenlernen

Wie schon im Kapitel über die Entwicklung der Rechenkompetenzen angesprochen, verfügen Kinder bereits nach der Geburt über ein angeborenes Grundverständnis betreffend Mengen und primitive Konzepte zu den Grundrechenoperationen. Aber ein kleiner Teil der Kinder kommt bereits mit einem Nachteil, also einer Schwäche in diesem Bereich auf die Welt. Die Ausprägung der Beeinträchtigung kann dabei unterschiedlich stark ausfallen, und natürlich ist sie auch in weiterer Folge von unterschiedlichen Umweltfaktoren, wie Förderung und Unterstützung im Vorschulalter abhängig. Das Ausmaß der tatsächlichen Schwierigkeiten wird erst in der Schule sichtbar, und da ist es bereits eine Kombination aus biologischen-angeborenen Faktoren und den Umweltfaktoren. Wird auf diese Defizite im schulischen Erstunterricht nicht ausreichend reagiert, kann es zur manifesten Rechenstörung führen. Daher ist es unumgänglich, bei Interventionen mit den numerischen Basisfähigkeiten (bzw. Vorläuferkompetenzen) zu starten, auch wenn in der betreffenden Schulstufe bereits viel komplexere mathematische Probleme behandelt werden (vgl. Landerl, Vogel & Kaufmann, 2022).

Neben dem Grad der Ausprägung der Beeinträchtigung kann auch das qualitative Bild abweichen. Bezugnehmend auf die drei verschiedene Zahlencodes („Triple Code Model" von Dehaene, 1992), wie sie im ersten Kapitel beschrieben werden, können einzelne Teilkompetenzen beim Rechnenlernen auch noch unterschiedlich stark betroffen sein. So kann eines der Kinder zwar die Mengen noch gut einschätzen und zuordnen, das Lernen der Malreihen fällt ihm aber sehr schwer. Dagegen zeigt ein zweites Kind das gegenläufige Bild, Mengeneinschätzung und die Orientierung im Zahlenraum sind sehr schwierig, das Abspeichern der Malreihen gelingt ihm aber relativ gut. Daher ist eine gezielte Beobachtung der vorhandenen Kompetenzen und das Erkennen der ersten Schwierigkeiten das oberste Ziel in der Schuleingangsphase. Die Mehrheit der Kinder mit Rechenschwierigkeiten zeigen Defizite beim Zahlenbegriff und können die Bedeutung der Zahlen (analoger Code) nicht mit den anderen Codes ausreichend verbinden. Zum Beispiel das Erkennen, dass die 8 aus 7 + 1, aber auch aus 6 + 2 usw. besteht.

Ein schulischer Unterricht, der zu früh (und ohne beim Kind Verständnis hergestellt zu haben) zum Üben und Automatisieren fortschreitet, sollte vermieden werden. Denn die fehlende oder mangelhafte Absicherung der Vorläuferkompetenzen führt oft in weiterer Folge zu Nutzung von ineffektiven Strategien.

Erkennungsmerkmale – Symptome

Kompetenzebenen zur Entwicklung der Zahl-Mengenverknüpfung und mögliche Schwierigkeiten (vgl. Schneider et al., 2013):

Zählen (Zahlwörter ohne Mengenbezug)

- Fehler- und lückenhaftes Aufsagen der Zahlwortreihe
- Probleme beim Weiterzählen von einer höheren Zahl
- Schwierigkeiten beim Rückwärtszählen, z. B. von 5 weg
- Zahlennachbarn können nicht spontan genannt werden

Mengen- / Größenbewusstheit von Zahlen (Verknüpfung von Zahlwörtern mit Mengen)

- Keine stabilen Fingerbilder
- Fehlende Kenntnis der Würfelbilder
- Probleme bei der Eins-zu-Eins-Zuordnung
- Fehlendes Bewusstsein, dass beim Zählen Mengen bestimmt werden
- Schwierigkeiten beim Kategorisieren der Begriffe „viel“ oder „wenig“
- Schwierigkeiten mit Vergleichen von Mengen („mehr“, „weniger“, „gleich viel“).
- Fehlendes Verständnis dafür, dass Mengen gleichbleiben, wenn nichts hinzugefügt oder weggenommen wird (Mengenkonstanz)
- Fehlendes Verständnis dafür, dass Mengen zerlegt und wieder zusammengesetzt werden können (Teil-Ganzes-Konzept)

Verständnis für Beziehungen zwischen Zahlen (Verknüpfung von Zahlwörtern mit Mengenrelationen)

- Probleme beim Erkennen, dass auch Zahlen in das Teile-Ganzes-Schema eingeordnet werden können und so die Zahlzerlegung möglich wird
- Schwierigkeiten beim Erkennen, dass der Unterschied zwischen zwei Zahlen durch eine Zahl ausgedrückt werden kann

Verfestigtes zählendes Rechnen

Zählen ist zu Beginn des Rechnenlernens die einzige und zu diesem Zeitpunkt auch eine durchaus sinnvolle und erfolgreiche Strategie. Spätestens im Zahlenraum 100 führt zählendes Rechnen häufig zu falschen Ergebnissen, auch wenn dieses im Zahlenraum 20 noch in vergleichsweise kurzer Zeit und sicher zu richtigen Ergebnissen geführt hat. Anhaltend zählendes Rechnen blockiert den Aufbau nicht-zählender Strategien und geht meist mit einem fehlenden Teil-Ganzes-Konzept einher. Das Abwarten, dass die Kinder selbständig, ohne weitere Intervention das zählende Rechnen aufgeben, ist eher unwahrscheinlich.

Aus der Literatur der aktuellen Fachdidaktik kann abgeleitet werden, dass Kinder von Anfang an Strategien des nicht-zählenden Rechnens erwerben sollten. Dies funktioniert am besten, wenn man schrittweise und individuell vorgeht. Die Additionen und Subtraktionen im Zahlenraum 10 werden auch als Fakten bezeichnet und im Langzeitgedächtnis abgespeichert. Durch das Verständnis der Beziehungen zwischen den Zahlen und durch Wiederholung entsteht ein assoziatives Netzwerk, auf das jederzeit zugegriffen werden kann. Ideal wäre also, dass alle Aufgaben im Zahlenraum 10 von den Kindern mühelos aus dem Gedächtnis abgerufen werden können. Wichtig dabei ist, nicht ohne Verständnis zu üben und nicht einfach auswendig zu lernen.

Schwierigkeiten beim Stellenwertverständnis

Verfestigtes zählendes Rechnen geht mit einer unzureichenden Entwicklung des Stellenwertverständnisses einher. Die besondere Rolle der Zahl 10 im Dezimalsystem wird den Kindern nicht deutlich. Das Bündelungsprinzip wird von den Kindern oft nicht ausreichend verstanden. Die Kinder müssen also verstehen, dass wir max. 9 Einer haben können, und ab der 10 wird es zu einer nächsten Stelle gebündelt (Schulz, 2014). Zusätzlich sind Schwierigkeiten im Stellenwertverständnis zum Teil auf die Intransparenz mancher Zahlwörter (z. B. Elf, Zwölf) zurückzuführen, aber auch die ganzen Zehner (z. B. Vierzig) lassen aus dem Wort nicht die direkte Schlussfolgerung zu, dass es sich um volle Zehner handelt (Vierzig statt Vierzehn – Wo stecken die 4 Zehner drin?). Ein Teil der Problematik ist auf die Inversion der Einer und Zehner in der deutschen Sprache zurückzuführen. Die Unstimmigkeit von Notation (zuerst links der Zehner, dann rechts der Einer) und der Sprechweise (zuerst Einer, dann Zehner) kann zu Problemen bei der Entwicklung des Stellenwertverständnisses führen. So zeigen sich sogenannte Zahlendreher, wenn die inverse Schreibweise nicht konsequent eingehalten wird. Zusätzlich führt die Tatsache, dass die gleiche Ziffer abhängig von ihrer Position unterschiedliche Größe darstellt, zu Schwierigkeiten. Für ein stabiles Stellenwertverständnis ist die klare Verbindung zwischen Zahlwort und Zahl, die Beherrschung des Dezimalprinzips und eine gute Verbindung mit der dahinter liegenden Menge vorausgesetzt. Die von manchen Kindern (und auch Lehrkräften) praktizierte „einfache Lösung“ (zuerst E dann Z) wird spätestens bei dreistelligen Zahlen zum Problem, weil bei der Notation „freier Platz“ gelassen werden muss, das sich auch durch falsche Eingaben bei der späteren Verwendung des Taschenrechners bemerkbar macht. Visualisierung und konkrete Vorstellungen sind notwendige Voraussetzungen, um ein gutes Stellenwertverständnis zu erwerben (Cobb und Wheatley, 1988).

Probleme beim Aufbau von Grundvorstellungen zu Operationen

Aufgrund des verfestigten zählenden Rechnens, dem fehlenden oder unzureichenden Verständnis für das Teil-Ganzes-Konzept und mangelndem Stellenwertverständnis kann der Aufbau von Grundvorstellungen zu Rechenoperationen nicht oder nur unzureichend gelingen (Gerster, 2009). Mit Aufbau von Grundvorstellungen ist gemeint, dass die Lernenden von konkreten Handlungen mit geeigneten Materialien zum Handeln in der Vorstellung kommen. Also ein schrittweiser Abbau vom Material ist oft notwendig. Die Kinder erwerben häufig ein sehr statisches Konzept mit wenig oder gar keiner Flexibilität. Die korrekte Operation in verschiedenen Alltagssituationen zu erkennen und vor allem auch ein flexibler Wechsel zwischen diesen (z. B. die Aufgabe 9–8 = kann durch Ergänzung gelöst werden) sollte die Zielsetzung sein. Kinder mit Rechenschwierigkeiten benötigen zu Beginn mehr Hilfestellungen , damit sie die Zusammenhänge und Prinzipien erkennen können.

Sekundäre Symptome

Die meisten Kinder, die in die Schule kommen, freuen sich darauf, bemühen sich sehr, wollen gut sein, Anerkennung bekommen, und wollen, dass Eltern und Lehrer/in mit ihnen zufrieden sind. Kinder mit Lernschwierigkeiten machen schon in den ersten drei Monaten der 1. Schulstufe die Erfahrung, dass – obwohl zu Hause und in der Schule fleißig geübt wird – das Rechnen nicht leichter wird. Im Gegenteil, je größer der Zahlenraum wird, desto schwieriger wird es.

Je mehr Elternhaus und Schule sich mit nur wenig Erfolg bemühen, desto mehr wird das Kind die Ursachen seines Versagens bei sich selbst suchen. Viele Eltern fragen sich in dieser Situation zunehmend ungeduldig, was am Rechnen so schwer sein soll! Bei gleich bleibendem Misserfolg wird dann zwischen Elternhaus und Schule oft die Ursache dafür beim jeweils anderen gesucht.

Unwissenheit über die Ursachen von Rechenschwierigkeiten führt somit oft zu gegenseitig schwindendem Vertrauen zwischen Elternhaus und Schule, zu einer Spirale von mehr Üben mit wenig hilfreichen Fördermaßnahmen, bescheidenem Erfolg, gegenseitigen nicht hilfreichen Schuldzuweisungen, Missverständnissen. Das Kind spürt von allen Seiten den Druck und muss darauf reagieren. Die meisten Kinder entwickeln gegen Mathematik eine Abneigung, manche auch gegen die Lehrkräfte und gegen das Üben an sich. Manche beginnen mit körperlichen Symptomen ihr Unbehagen auszudrücken, sie schlafen schlecht, leiden unter Übelkeit, Kopfschmerzen etc. und entwickeln ein Gefühl der Unzulänglichkeit. Insgesamt ist eine schwindende Leistungsbereitschaft oft die Folge.

Es können sich in der Folge Sekundärsymptome wie Rechenangst, Schulunlust, mangelnde Motivation, Selbstwertprobleme, Verhaltensschwierigkeiten, somatische Beschwerden entwickeln.

Literatur

Cobb, P. & Wheatley, G. (1988). Children´s initial understanding of ten. In Focus on Learning Problems in Mathematics, 10, H. 3, 1–28.

Gerster, H. D., (2009). Schwierigkeiten bei der Entwicklung arithmetischer Konzepte im Zahlenraum bis 100. In: Fritz, A., Ricken, G., & Schmidt, S. (Hrsg.) Handbuch der Rechenschwäche, 3. Auflage, Weinheim: Beltz, 248–268.

Fischbach, A., Schuchardt, K., Brandenburg, J., Klesczewski, J., Balke-Melcher, C., Schmidt, C., Büttner, G., Grube, D., Mähler, C., & Hasselhorn, M. (2013). Prävalenz von Lernschwächen und Lernstörungen: Zur Bedeutung der Diagnosekriterien. Lernern und Lernstörungen, 2, 65–76.

Landerl, Karin; Vogel, Stephan; Kaufmann, Liane (2022): Dyskalkulie. Modelle, Diagnostik, Intervention. 4., überarbeitete und erweiterte Auflage. München: UTB; Ernst Reinhardt Verlag (utb, 3066).

Schneider, W., Küspert, P., & Krajewski, K. (2013). Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen. Paderborn: UTB Verlag.

Schulz, A. (2014). Fachdidaktisches Wissen von Grundschullehrkräften. Wiesbaden: Springer.

3 Diagnostik

Grundlegende Informationen

Sinn und Zweck einer genauen Diagnostik ist es festzustellen, wo die Probleme eines Kindes beim Rechnenlernen genau liegen und welche Hilfestellungen und Fördermaßnahmen es benötigt, um die Entwicklung des mathematischen Denkens angemessen voranzutreiben.

Im schulischen Kontext werden zwei relevante Situationen unterschieden: einerseits der Diagnoseprozess als pädagogische Förderdiagnostik und andererseits klinisch-psychologische / medizinische Diagnostik.

Pädagogische Förderdiagnostik

Die pädagogische Förderdiagnostik wird durch Pädagog/inn/en im eigenen Ermessen für Förderableitungen durchgeführt. Dabei steht das Erkennen von Schwächen und Stärken im Vordergrund.

Die Lehrperson erhebt zunächst, über welche Kompetenzen das Kind gemessen an den Lernzielen der jeweiligen Schulstufe bereits verfügt. Eine detaillierte Abklärung der basisnumerischen und rechnerischen Leistungen ist dabei ausschlaggebend. Wichtig ist es zu verstehen, wie das Kind zu seinem Ergebnis kommt. Es macht den entscheidenden Unterschied, ob das richtige Resultat durch Zählen oder durch „echtes" Rechnen zustande kommt. Anzumerken ist, dass Kinder mit Rechenschwierigkeiten über eine Fülle von angeeigneten Kompensationsstrategien verfügen können, mit deren Hilfe sie bei an sie gestellten Aufgaben möglicherweise durchaus zum richtigen Ergebnis kommen. So kann es der Fall sein, dass richtige Ergebnisse durch nicht zukunftsfähige Rechenkonzepte erreicht werden. Daher ist es für die Diagnostik unbedingt notwendig, nicht nur die Ergebnisse zu bewerten („richtig", „falsch", „fast richtig"), sondern die Vorstellungen und Tätigkeiten des Kindes beim Rechnen zu beachten. So ist es sehr hilfreich, die Kinder schon im Unterricht zu ermuntern, über ihre Lösungswege nachzudenken und diese zu kommunizieren. „Die kindlichen Leistungen sollten nicht allein im Vergleich zu den anderen Kindern gesehen werden, sondern vor dem Hintergrund des Spektrums an mathematischen Lösungsmöglichkeiten, Denkweisen und auch Entwicklungsprozessen" (Häsel-Weide, 2014, S. 26). Nicht alle Aufgabenformate sind dazu geeignet. Diese sollten möglich machen, dass die Kinder ihre Ideen schriftlich festhalten, ihre Erkenntnisse mit Hilfe von Zeichnungen oder Materialien darstellen und ihre gewonnenen Erkenntnisse in Form von Eigen- und Koproduktionen anwenden können (vgl. Häsel-Weide, 2014).

Kinder, die das aus dem Unterricht gewohnt sind, haben meist keine Probleme mit dem wichtigsten Diagnoseinstrument, der „Methode des lauten Denkens“. Diese ist am besten in einer Einzelsituation möglich.

Kann das Kind eine Aufgabengruppe nicht lösen, sollten zwei Dinge geschehen:

- Erstens wäre festzustellen, wie das Kind mit Hilfe von Anschauungsmaterial die Aufgabe erklären kann.
- Zweitens sollte man erheben, welche leichteren Aufgaben das Kind ohne Material selbständig bewältigen kann, d. h. bis zu welchem Entwicklungsschritt das Kind gelangt ist und was es nicht mehr versteht.

Im Rahmen der pädagogischen Diagnostik ist es wichtig, eine entspannte und angstfreie Situation für das Kind zu schaffen und sich mit Geduld und Neugierde auf den Rechenweg des Kindes einzulassen.

Klinisch-psychologische Diagnostik

Bleiben bei der pädagogischen Förderdiagnostik Fragen offen, sollte eine weiterführende Klinisch-psychologische Abklärung erfolgen. Ein Diagnoseprozess ist dann einzuleiten, wenn neben den Schwierigkeiten im Rechnenlernen zusätzliche Schwierigkeiten vermutet werden; wenn also beispielsweise

- sozial-emotionale Auffälligkeiten hinzukommen (z. B. Prüfungsangst, depressive Verstimmungen, Motivationsschwierigkeiten, Krisen, familiäre Belastungen)
- Lernprobleme in mehreren Gegenständen auftreten
- Schwierigkeiten bezüglich Konzentration und Selbststeuerung auftreten
- die Übungsfortschritte bei einem rechenschwachen Kind unerwartet gering sind
- es Uneinigkeiten zwischen Eltern und Schule gibt.

Die psychologische Rechenstörungsdiagnostik sollte daher nicht nur die Abklärung des basisnumerischen und rechnerischen Entwicklungsstandes beinhalten, sondern es sollen je nach Fall zusätzlich noch folgende Faktoren abgeklärt werden):

- Sprachentwicklung (auch familiärer Sprachhintergrund)
- Visuell-räumliche Fähigkeiten
- Aufmerksamkeitsfunktionen
- Allgemeine Problemlösefähigkeiten
- Sonstige schulische Leistungen
- Psychoemotionale Befindlichkeiten

Der Ablauf eines klinisch-psychologischen Diagnoseprozesses ist festgelegt und beinhaltet folgende Punkte:

- Die Fragestellung wird in eine prüfbare psychologische Hypothese übersetzt.
- Die familiäre und schulische Vorgeschichte (Anamnese) wird mit den Eltern erhoben.

- Relevante Vorbefunde und Interventionsberichte werden eingeholt.
- Bezüglich etwaiger körperlicher Einflüsse auf die Fragestellung (motorische Probleme, unkorrigierte Hör- und Sehdefizite u. a.) wird an die Medizin verwiesen.
- Der kognitive Entwicklungsstand wird mit validierten und normierten Verfahren erhoben (Intelligenz, Aufmerksamkeit…).
- Schulische Leistungen werden ebenfalls anhand validierter und normierter Verfahren erhoben, die eine differenzierte Einschätzung des Entwicklungsstandes erlauben.
- Außenurteile zu Symptomatik und möglichen Komorbiditäten werden mittels Gespräch oder Fragebögen von der Familie und den Lehrkräften erfragt.
- Zusammenfassung der Ergebnisse und Beantwortung der Frage (gegebenenfalls Stellen einer Diagnose) in einem Gutachten, das die eingesetzten Verfahren sowie standardisierte Testwerte (z. B. Prozentränge, T-Werte) nachvollziehbar darstellt.
- Interventionsempfehlungen

Die kompetente Anwendung klinisch-psychologischer Methoden setzt eine mehrjährige Ausbildung voraus, daher ist sie nur diesem Berufsstand vorbehalten.

Verfahren, die im Rahmen einer klinisch-psychologischen Diagnostik eingesetzt werden können, sind in den S3-Leitlinien (028-046l_S3_Rechenstörung-2018-03_1.pdf) aufgelistet. Diese sind ebenso auf der Homepage der Schulpsychologie www.schulpsychologie.at/lernen-lernerfolg/rechenschwierigkeiten zu finden.

Zur Optimierung der Maßnahmenwirksamkeit können Beratungen durch die schulpsychologischen Beratungsstellen und Beratungseinrichtungen im Bereich der Inklusions- und Sonderpädagogik in Anspruch genommen werden (siehe Rundschreiben 27/2017 in der Rundschreibendatenbank des BMBWF: https://rundschreiben.bmbwf.gv.at/rundschreiben/?id=768)

Literatur

Häsel-Weide, U., Nührenbörger, M., Moser Opitz, E., & Wittich, C. (2014). Ablösung vom zählenden Rechnen. Fördereinheiten für hetrogene Lerngruppen. Seelze: Kallmeyer Verlag

S3-Leitlinien: Diagnostik und Behandlung der Rechenstörung
028-046l_S3_Rechenstörung-2018-03_1.pdf (awmf.org), 19.07.2023

Schuleingangsphase

Risikofaktoren für die Entwicklung von Rechenschwierigkeiten können bereits frühzeitig beobachtet werden. Je früher eine adäquate Förderung stattfindet, desto größer sind die Chancen, dass das betroffene Kind Erfolge erzielt, und umso weniger sind negative schulische Konsequenzen zu erwarten.

Der Fokus in diesem Kapitel liegt auf der individuellen Beobachtung mathematischer Vorläuferfähigkeiten in der Schuleingangsphase, der Prävention von Rechenschwierigkeiten beim Rechnenlernen und entsprechenden Interventionen. Das rechtzeitige Erkennen dieser Schwierigkeiten ist also das primäre Ziel. Die vorliegende Checkliste sollte bei der differenzierten Wahrnehmung und Erkennung dieser Probleme helfen. Unabhängig von der Ursache, die in dieser frühen Phase noch nicht immer bekannt sein muss, sollte eine maßgeschneiderte Unterstützung bei den mathematischen Vorläuferkompetenzen erfolgen. Diese ersten Wissenslücken sollten sofort geschlossen werden.

Folgend wird eine Checkliste dargestellt, welche die Beobachtung der spezifischen mathematischen Vorläuferfähigkeiten (mengenbezogenes Vorwissen, zahlbezogenes Vorwissen und notwendigem Fachvokabular) erleichtern soll, um damit die Basis zu schaffen, Kinder von Schulbeginn an bestmöglich zu fördern. Für die Anwendung der Checkliste sind einige Materialien erforderlich, die man sich selbst besorgen bzw. selbst erstellen kann.

Checkliste für die Schuleingangsphase

Mengenbezogenes Vorwissen **Kann das Kind …**	✓
… sagen, wie viel von einer bestimmten Sache vorhanden ist? (Klassifizieren; z. B. Gruppenzugehörigkeit: 3 Äpfel, 3 Birnen)	
… ungeordnete Mengen von 4 (Punkte auf Karte, Spielsteine …) sicher erkennen, wenn sie nur kurz (ca. 1 Sekunde) gezeigt werden und die Augenzahl beim Würfeln spontan benennen (simultane Mengenerfassung), oder muss das Kind jedes Mal wieder von 1 weg zu zählen beginnen?	
… Mengen nach Größe bzw. bestimmten Merkmalen ordnen? (Seriation; z. B. 5–7 Gegenstände vom Kleinsten bis zum Größten ordnen)	
… eine Anzahl von Gegenständen auf Verlangen geben? („Gib mir 3 Steine!“) Mehrere Mengen bis 10 sollten aufgezählt werden. Ab wann zeigt das Kind Schwierigkeiten?	
… eine Menge zu einer arabischen Zahl korrekt zuordnen?	
… Fingerbilder bis 10 simultan (also gleichzeitig aufdecken, ohne zu zählen) zeigen? Wenn nein, bis zu welcher Menge funktioniert es?	
… verstehen, dass Mengen aus Teilmengen bestehen können und diese flexibel anwenden? (Teil-Ganzes-Prinzip)	

Zahlbezogenes Vorwissen **Kann das Kind …**	✓
… Zahlwörter verwenden (z. B. drei Häuser, fünf Autos …)?	
… sicher (ab-)zählen? (Zählfertigkeit) • allgemein schon bis mind. 10 vorwärts verbal zählen? • von 5 rückwärts zählen? • die 1:1 Zuordnung beim Aufzählen von Objekten einhalten, z. B. von 6 beginnend aufzählen)? • die vorausgehende oder nachfolgende Zahl benennen, z. B. welche Zahl kommt vor/nach 4? • aus zwei vorgegebenen einstelligen Zahlen die größere/kleinere Zahl angeben? • Objekte, Bewegungen und Rhythmen abzählen (z. B. beim eigenen Gehen die Schritte zählen)? • erkennen, dass die Zählrichtung (von rechts nach links bzw. links nach rechts) für das Ergebnis ohne Bedeutung ist? ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ Man lässt das Kind zunächst die Steine abzählen, danach wird es gefragt: „Wenn du jetzt hier (auf der anderen Seite) zu zählen beginnst, was glaubst du, wie viele sind es?“	
… Ziffern erkennen und diese akustisch vorgegebenen Zahlen zuordnen? (Arabisches Zahlenwissen)	
… einfache Rechnungen – z. B. Aufteilen, Dazugeben, Wegnehmen bewältigen? (Alltagsmathematik mit konkretem Material) • 6 Würfel auf 2 bzw. 3 Kinder gleichmäßig aufteilen • z. B. folgende Aufgabe lösen: „Stell dir vor, du hast drei Bücher und holst dir danach noch zwei. Wie viele hast du dann?“	

Numerisches Fachvokabular **Kann das Kind …**	✓
… die Begriffe „mehr“, „weniger“ und „gleich viel“ unterscheiden? (anhand von konkretem Material)	
… verstehen: Wenn einer mehr hat, muss der andere automatisch weniger haben?	
… die Begriffe „alle“, „viele“, „ein paar“ verstehen?	
… die Begriffe „nichts“, „keine“ verstehen?	
… die Handlung verstehen und umsetzen bei den Wörtern „dazu geben“, „weg-nehmen“, „aufteilen“ im Sinne von Mengen zerlegen?	
… den Unterschied verstehen zwischen dem kardinalen Aspekt der Zahlwörter („Ich will 3 Steine“) und dem ordinalen („Ich will den dritten Stein“)?	

Falls ein Kind in mehreren Bereichen Unsicherheiten aufweist, sollten gezielte Fördermaßnahmen überlegt werden, bevor mit dem formalen Rechnen begonnen wird.

Prävention und Intervention in der Schuleingangsphase

Hier sollen Bausteine der Förderung mathematischen Denkens beschrieben werden, die entsprechend der individuellen Lernvoraussetzungen des jeweiligen Kindes herangezogen werden können, um den Erwerb mathematischer Kompetenzen zu forcieren (Pixner 2017).

Förderung des mengen- und zahlenbezogenen Vorwissens, wie auch des entsprechenden Fachvokabulars

Ein präventives Fördern der spezifischen mathematischen Vorläuferfähigkeiten, des mengen- und zahlenbezogenen Vorwissens und des entsprechenden Fachvokabulars (vgl. Checkliste für die Schuleingangsphase) kann Kinder mit individuellen Schwächen beim Rechnenlernen unterstützen. In den ersten Schulwochen soll neben der Förderung der Zählkompetenzen besonderes Augenmerk darauf liegen, die Zahlen in Beziehung zu ihren Zahlennachbarn und als Zusammensetzung zu erfassen. Dieses Zahlenverständnis ist die Basis für das Rechnenlernen. Die einzelnen notwendigen Schritte werden in den folgenden Unterpunkten erläutert. Dabei sollte immer der Blick auf die Sprache nicht vergessen werden – ein ausreichendes Verständnis der vorgegebenen Instruktionen ist oft entscheidend für das Gelingen der Handlung.

Zählkompetenzen bis 10

Manche Kinder haben noch Schwierigkeiten in der Orientierung im Zahlenraum 10. Das Vorwärts- und Rückwärtszählen kann dabei sehr gut in der Bewegung geübt werden. Entweder hat die Lehrkraft Zahlen (am besten auf rutschfesten Unterlagen) oder sie zeichnet diese in Kästchen auf dem Boden auf (z. B. mit Kreide am Schulhof) und lässt die Kinder vorwärts und rückwärts auf diesem Zahlenweg laufen. Zuerst müssen die Zahlen schon in der richtigen Reihenfolge aufgelegt und auch korrekt benannt werden. Nach und nach werden die einzelnen, bereits verinnerlichten Zahlen gelöscht (umgedreht), und man kann beobachten, wie das Kind diese Anforderung ohne Hilfe bewältigt. Funktioniert es in Einer-Schritten gut, kann man es steigern, indem man in Zweier-Schritten zählt (wieder vor und zurück). Dabei sollte man mit geraden und ungeraden Zahlen gleichmäßig üben (die Begriffe gerade und ungerade Zahlen sollten dabei gut eingeführt werden). Hier können dann die ersten Rechnungen (+/-1 oder später auch +/-2) am Weg in der Bewegung geübt werden. Später kann der Zahlenweg bis 20 oder höher erweitert werden.

Oder man bastelt beispielsweise Papierhütchen und schreibt jeweils eine Zahl darauf. Danach müssen sich die Kinder mit ihren Hütchen am Kopf in der richtigen Reihenfolge in die Reihen eingliedern. Bei dieser Übung können dann nicht nur Zählübungen vor und zurück durchgeübt, sondern auch die Zahlennachbarn betrachtet werden. („Ich bin die 3 und ich stehe zwischen der 2 und 4. Also mein Vorgänger ist die 2 und mein Nachfolger ist die 4.“)

Oder ein Kind außerhalb der Reihen darf entsprechende Fragen beantworten und entlang der Zahlenreihe laufen. Wenn man es schwieriger gestalten will, dürfen die Nachbarn ihre Hütchen umdrehen, damit keine Zahl mehr sichtbar ist. Auch dieses Spiel kann z. B. mit Fingerbildern oder Mengenkarten kombiniert werden.

Absichern der Eins-zu-eins-Zuordnung sowie der quantitativen Grundbegriffe „gleich viel", „mehr" und „weniger"

Manchen Kindern ist zum Schuleintritt nicht klar, dass „mehr", „weniger" und „gleich viel" Relationen darstellen und keine Eigenschaften der Dinge sind. Diesen Kindern ist auch unklar, dass, wenn eine Menge „mehr" ist, die Vergleichsmenge „weniger" sein muss. Die Frage, um wie viel mehr die eine Menge als die andere ist, stellt für sehr viele Kinder beim Schuleintritt eine große Herausforderung dar (Relationalzahl). Man lässt dazu die Kinder verschiedene kleine Mengen legen bzw. abzählen, 1:1 zuordnen und vergleichen. Dies kann auch in einer Partnerübung passieren. Jedes Kind würfelt eine Zahl, legt die entsprechende Menge auf, das zweite Kind würfelt und legt die zweite Menge parallel (1:1 Zuordnung beachten) dazu, und dann kann verglichen werden. Wer hat mehr? Wer hat weniger? Oder haben wir gleich viel?

Erarbeitung des Zahlverständnisses

Im ersten Schritt sollte die Zahl (Zahlwort) und Mengen-Zuordnung gesichert werden. Gegenstände zu Zahlen zuordnen, passende Karten zu suchen oder die richtige Anzahl aus einer Kiste zu holen, wären ein paar Beispiele für solche Übungen. Dabei könnte man diese Übungen gleich auch mit den entsprechenden Finger- und/oder Würfelbildern kombinieren (z. B. wäre ein Zahl-Fingerbild Memory dazu empfehlenswert). Bei Karten, Objekten oder Bildern kann dann auch immer wieder von klein zu groß oder anders herum sortiert werden. Sobald die Kinder diesen kardinalen Aspekt einer Zahl verinnerlicht haben, also die Aufgaben mit „Wie viel?" (Menge / Kardinalzahl) oder „Gib mir 4 Steine!" ausreichend bewältigen, kann man den Fokus auf den ordinalen Aspekt einer Zahl als „der Wievielte" (Rangplatz / Ordinalzahl) lenken.

Aufbau eines „Fingerbildes" der Zahlen bis 10

Im ersten Schritt werden die klassischen Fingerbilder geübt und dargestellt (Daumen=1, Daumen und Zeigefinger=2, plus Mittelfinger ergibt dann 3. Die 4 kann auf zwei Arten mit Daumen, Zeigefinger, Mittel- und Ringfinger gezeigt werden oder auch ohne den Daumen nur der Zeigefinger, Mittelfinger, Ringfinger und kleiner Finger). Dann kann es ohne visuelle Kontrolle, also entweder hinter dem Rücken, unter der Bank oder unter einem Tuch geübt werden. Funktionieren die Bilder simultan (also streckt das Kind alle Finger gleichzeitig aus), können kleinere Übungen (Rechnungen) gemacht werden. Zum Beispiel: „Zeig mir 3 Finger und jetzt klappe noch 5 dazu auf. Wie viel hast du dann?" Die Kinder können lernen, dass sie z. B. die Zahl 10 in zweimal fünf teilen können. Wenn sie dieses Wissen internalisiert haben, erleichtert das die weiteren Rechenschritte. Die stabilen Fingerbilder sind vor allem für alle Aufgaben mit 5 (Kraft der 5) sehr wichtig.

Ziel ist es, den tatsächlichen Einsatz der Finger bzw. Hände durch die Vorstellung der Finger bzw. Hände überflüssig zu machen (so auch später bei der Kraft der 5).

Achtung, die Fingerbilder können kulturspezifisch abweichen, sollten Sie also ein Kind mit Migrationshintergrund haben, welches stabile Fingerbilder aufweist, ist Ihre Flexibilität gefragt.

Aufbau eines „Würfelbildes“ der Zahlen bis 6 (oder 9)

Regelmäßiger Einsatz des Würfels bei verschiedenen Sortier- und Zuordnungsspielen kann die Abspeicherung der Würfelbilder fördern. Die Erweiterung bis 9 (Dominobilder) kann gegebenenfalls für strukturierte Mengenerfassungen hilfreich sein.

Allgemeines zum Materialeinsatz: Erarbeitungsmaterial als „Leiter“ statt als „Krücke“

Positive Effekte konnten bei der spezifischen Förderung mathematischer Kompetenzen anhand visueller Anschauungshilfen festgestellt werden, weil so das Arbeitsgedächtnis entlastet werden kann und Kinder beim Operieren mit Mengen konkrete Hilfsmittel in die Hand bekommen. Darauf können später abstrakte Vorstellungen von den Zahlen und Rechenoperationen aufgebaut werden (Krajewski, 2005).

Das Material soll nicht auf Dauer als Abzählhilfe verwendet, sondern durch geeignete Fragestellungen und Denkanstöße zur Lösung von Aufgaben herangezogen und nach und nach abgebaut werden. Das erfordert oft einen zweiten Schritt nach dem Zählen („Woran kannst du jetzt ohne zu zählen erkennen, dass es 7 Punkte im Zwanzigerfeld sind?“).

Ein Hin- und Herwechseln zwischen verschiedenen Materialien und unterschiedlichen, bunten Darstellungen soll vermieden werden, weil die Kinder die Materialien jeweils lernen müssen und eine methodische Vielfalt zu Verwirrung und Überforderung führen kann. Für den Anfangsunterricht werden vorwiegend strukturierte Materialien empfohlen, dabei vor allem solche, die die „Kraft der 5“ betonen (z. B. Zwanzigerfeld, Abakus, Finger). Das Ziel ist es, auf das Material auch wieder verzichten zu können. Sollten Kinder die Materialien zum (heimlichen) Zählen verwenden, ist es nicht sinnvoll, das Abzählen zu verbieten, sondern am Aufbau strukturierter Zahlen zu arbeiten („Aus welchen Zahlen besteht 7?“).

Aufbau von Zahlwissen und Rechenfertigkeit im Zahlenraum 10 durch „vergleichendes Rechnen“

Weiters sollen der Aufbau eines gegliederten Zahl-Wissens (z. B. „6“ besteht aus 4 + 2 folgt 6 – 4 = 2), sowie das Auswendigmerken von Zahlverknüpfungen (z. B. 3 + 3 = 6, 3 + 4 = 7, …) gefestigt werden (mögliche Frage: „Vergleiche die Aufgaben hier und dort. Was macht den Unterschied aus?“).

Zahlen zerlegen durch Einsicht in die Zerlegungs-Handlung

Bei „7“ sollte „1 + 6“, „2 + 5“, „3 + 4“ … selbstverständlich mitgedacht werden (z. B. mithilfe einer Kugelkette – für jede Zahl eine eigene Kette). Auf symbolischer Ebene kann hier mit Zahlenhäusern gearbeitet werden.

Gezieltes „Automatisieren“

Wenn ein Kind in der Lage ist, Zahlen gegliedert zu denken und vergleichend zu rechnen, kann systematisch geübt werden. Dazu müssen Kinder unterscheiden lernen, was beim Rechnen „einfache“ Aufgaben[17] sind. Für nicht zählende Rechner sind ±1, ±5, ±10, Verdoppelungen und die Partneraufgaben (zusammen 10) leichte Aufgaben. Diese sollen zuerst automatisiert sein, weil man dann beim Ableiten auf diese zurückgreifen kann. Die Ableitestrategien umfassen Nachbaraufgaben, Tauschaufgaben und Umkehraufgaben des schon Automatisierten. Durch diese Vernetzung entsteht ein Kosmos von zusammenhängenden Rechnungen und ein strukturierter Zahlenraum.

Der Übergang von einer Abzähl- zu einer Abrufstrategie findet bei Kindern zu unterschiedlichen Zeitpunkten statt. Das Üben und Automatisieren kann dem Kind helfen, schneller zu einer Lösung zu kommen, jedoch ist es wichtig, gleichzeitig Verständnis für Zahlen und Mengen zu forcieren, um auch langfristig das Rechnenlernen zu erleichtern.

Aktiv-entdeckendes Lernen (vgl. Wittmann & Müller, 1995)

Durch eigenes mathematisches Tun können Kinder Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten selbst entdecken. Individuelle Lösungswege und Strategien sollen diskutiert werden. Dabei werden (Denk-)Fehler als Chance gesehen, um neue Wege auszuprobieren. Ein Verständnis und ein Begreifen mathematischer Strukturen und Gesetzmäßigkeiten soll unterstützt werden, damit die Kinder eine Basis haben, um den weiteren rechnerischen Anforderungen gerecht zu werden. Das Einüben unverstandener Regeln sowie das ständige, zählende Hantieren sollen tunlichst verhindert werden.

Nachfragen

Um das jeweilige Kind individuell und differenziert fördern zu können, ist es essentiell herauszufinden, wie das Kind denkt und was es bis jetzt verstanden hat. Im Unterricht ist häufiges Nachfragen zu empfehlen („Wie hast du hier gerechnet?“, „Wie bist du zu diesem Ergebnis gekommen?“), um zu erfahren, welche Rechenstrategien gerade angewendet werden. Wichtig ist das häufige Reflektieren der Kinder über Rechenaufgaben („Warum ist das so?“, „Wie hängt das mit schon Bekanntem zusammen?“), die Kommunikation der Kinder untereinander und mit der Lehrkraft. Dabei können die Kinder Denkfehler korrigieren und von der zählenden Zahlverwendung hin zu effizienteren Rechenstrategien, zum Erkennen, Verstehen und Nutzen von operativen Zusammenhängen kommen.

---

17 Für zählende Kinder sind Rechnungen dann einfach, wenn wenig zu zählen ist.

Literatur

Pixner, S. (2017). Vorschulische mathematische Kompetenzen und Risikofaktoren für die Entwicklung einer Rechenschwäche oder einer Rechenstörung. In A. Fritz, S, Schmidt & G. Ricken: Handbuch Rechenschwäche. S. 96–110. Weinheim: Beltz Verlag.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G.N. (1995). Mit Kindern rechnen. Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule.

Grundstufe I und II

Beobachtungsbogen Grundstufe I

Um Rechenschwierigkeiten frühzeitig erkennen zu können, sollten nicht nur die Resultate beim Rechnen beachtet werden. Wichtig ist vor allem zu beobachten, wie die Ergebnisse erzielt werden (vgl. Gaidoschik, 2002). Dies ist vor allem in Einzelsituationen möglich. Die unten angeführten Punkte stellen eine Hilfestellung dar, um gezielt zu erfassen, in welchen mathematischen Teilbereichen Unsicherheiten vorhanden sind.

Die folgenden Aufgabenstellungen gelten für das Ende der 1. Schulstufe bzw. Ende der 2. Schulstufe. Die Beobachtung kann aber auch zu einem anderen Zeitpunkt erfolgen, indem man die Rechenbeispiele an die aktuelle Lernzielvorgabe anpasst.
Bitte markieren Sie die Inhalte, die das Kind bereits versteht bzw. lösen kann, mit einem Haken:

Beobachtungsbogen für LehrerInnen (Grundstufe I)		✓
1. Schulstufe		
1.	**Zählen**	
	a) Kann das Kind im Zahlenraum 30 sicher vorwärts und rückwärts zählen?	
	b) Kann es z. B. von 14 beginnend weiterzählen?	
	c) Kann das Kind Fragen wie die folgende beantworten, ohne vorher nachzuzählen? Welche Zahl kommt nach / vor der 6?	
	d) Kann das Kind die Zehnerzahlen bis 100 nennen?	

Beobachtungsbogen für LehrerInnen (Grundstufe I)		✓
2.	**Anwendung von Operationen**	
	a) Kann das Kind Plus und Minus im erlernten Zahlenraum sicher anwenden? Lassen Sie sich den Rechenvorgang vom Kind erklären. Welche Strategien fallen auf? (z. B. zählendes Rechnen) Wie löst das Kind folgende Aufgaben?	
	b) Tauschaufgaben Beispiel: 8 + 1 = 9 1 + 8 = 9 Kann das Kind die 1. Aufgabe zur Lösung der 2. nützen? Welche Begründung gibt das Kind?	
	c) Verständnis von Rechenkonzepten (Zusammenhang zwischen Plus / Minus) Beispiel: 3 + 3 = 6 6 – 3 = 3 Kann das Kind die 1. Aufgabe zur Lösung der 2. nützen? Welche Begründung gibt das Kind?	
	d) Platzhalter: 3 + ___ = 7	
	e) Wie macht das Kind eine Zehnerüberschreitung wie 7 + 6 oder 5 + 9?	
3.	**Prinzipien Aufteilen, Dazugeben und Wegnehmen** Können folgende Aufgaben gelöst werden?	
	a) 9 Bälle auf 3 Kinder gleichmäßig aufteilen	
	b) „Stell dir vor, du hast fünf Bücher und holst dir danach noch zwei. Wie viele Bücher hast du dann?“	

Beobachtungsbogen für LehrerInnen (Grundstufe I)		✓
2. Schulstufe		
1.	**Zählen**	
	a) Kann das Kind im Zahlenraum 100 sicher vorwärts und rückwärts zählen?	
	b) Kann es in Zweierschritten, Fünferschritten, Zehnerschritten von beliebigen Ausgangszahlen vorwärts und rückwärts zählen?	
2.	**Zahlencodierung**	
	Liest bzw. schreibt es die Zahlen im Zahlenraum 100 richtig, ohne sie zu vertauschen oder die Schreibrichtung zu ändern? (z. B. 38 statt 83)	
3.	**Orientierung im Zahlenraum 100**	
	a) Wird eine Zahl auf einem Zahlenstrahl / einem Maßband gefunden? z. B: 53 oder 79	
	b) Kann das Kind Größenvergleiche zwischen zweistelligen Zahlen machen? Beispiel: „Wo steht die höhere Zahl?“ (39 oder 41) Woran erkennst du das?	
	c) Kann es beurteilen, zwischen welchen Zehnerzahlen eine Zahl liegt?	

Beobachtungsbogen für LehrerInnen (Grundstufe I)		✓
4.	**Addieren und Subtrahieren im Zahlenraum 100**	
	a) Kann das Kind folgende oder ähnliche Rechnungen sicher lösen? 74 + 15 = ? 88 – 12 = ?	
	b) Kann das Kind Rechnungen mit Zehnerüberschreitung bzw. Zehnerunterschreitung lösen? Beispiele: 47 + 16 = ? 54 – 27 = ?	
	c) Kommt es zur richtigen Lösung, ohne zu zählen bzw. „Zählmaterial" zu verwenden?	
5.	**Multiplizieren**	
	a) Versteht das Kind das Multiplizieren als ein Vervielfachen? z. B. : 4 × 3 als vier Dreier	
	b) Wie interpretiert das Kind Multiplikationen mit Material (z. B. die Rechnung 3 × 4)?	
	c) Versteht das Kind Zusammenhänge zwischen den Multiplikationen? z. B. 5 × 5 ist die Hälfte von 5 × 10 z. B. 9 × 3 ist um einen Dreier weniger als 10 × 3	
6.	**Verständnis von Sachaufgaben**	
	a) Kann das Kind Sachaufgaben in eigenen Worten wiedergeben? b) Kann das Kind Sachaufgaben mit Material, einer Skizze oder szenisch verdeutlichen? c) Kann das Kind Sachaufgaben aus einem Term konstruieren? d) Kann das Kind aus einer Materialsituation eine passende Sachaufgabe erfinden?	

Anmerkung: Die Auffälligkeiten, die für die erste Schulstufe beschrieben werden, können auch noch in höheren Schulstufen unverändert oder in einer abgewandelten Form fortbestehen. Falls ein Kind in mehreren Bereichen Unsicherheiten aufweist, sollten zusätzlich noch die Checkliste für die Schuleingangsphase herangezogen und gezielte Fördermaßnahmen überlegt werden.

Fallbeispiel

Belinay, sieben Jahre
Bespiel für ein Kind mit Rechenschwierigkeiten / Deutsch als Zweitsprache
Grundstufe I

Belinay wurde dem Schulpsychologischen Dienst im 2. Halbjahr der 2. Klasse Volksschule vorgestellt und wies bis zu diesem Zeitpunkt noch keinen Schullaufbahnverlust auf. Die Klassenlehrerin wünschte sich in Absprache und im Einverständnis mit den Eltern eine schulpsychologische Abklärung, da die Schülerin trotz intensiven Wiederholens und dem regelmäßigen Besuch des Förderunterrichts noch enorme schulische Defizite im Rechnen zeigte. Die Klassenlehrerin berichtete auch von zusätzlichen Unsicherheiten im sprachlichen Verständnis.

Im Gespräch mit den Eltern beschrieben diese ihr Kind als zurückhaltendes und schüchternes Mädchen. Sie erzähle wenig von der Schule. Da ihre Tochter die Nachmittagsbetreuung besuche, wo sie auch ihre Hausaufgaben erledige, hätten sie von den Problemen im Rechnen wenig mitbekommen. Erst nach dem letzten Elterngespräch an der Schule wären die Schwierigkeiten von der Lehrerin angesprochen und geschildert worden. Seitdem übten sie mit ihrer Tochter regelmäßig, seien jedoch schnell an ihre Grenzen gestoßen. Belinay verzweifle schnell an den Aufgabenstellungen, werde dann wütend und verweigere die Mitarbeit.

Im Anamnesegespräch zeigten sich keine Auffälligkeiten in der frühkindlichen Entwicklung und sowohl die Schwangerschaft als auch die Geburt waren problemlos verlaufen. Ihre motorische und sprachliche Entwicklung sei altersentsprechend abgelaufen.

Die Klassenlehrerin beschrieb Belinay als freundliche aber zurückhaltende Schülerin. Sie sei im Unterricht sehr ruhig und unauffällig. Teilweise falle es ihr schwer, sich auf Deutsch auszudrücken. Es unterliefen ihr noch viele grammatikalische Fehler und auch ihr deutscher Wortschatz sei eingeschränkt. Im Lesen und Schreiben könnte Belinay aktuell noch mithalten, seit Beginn der zweiten Klasse würden sich jedoch deutliche Probleme beim Rechnen zeigen. Der Klassenlehrerin sei zwar kein offensichtlich zählendes Rechnen aufgefallen, jedoch benötige die Schülerin enorm lange, um mathematische Aufgaben zu bearbeiten. Manchmal versuche das Mädchen die Lösung der Aufgaben von ihren Banknachbarinnen abzuschreiben. Besondere Schwierigkeiten würden sich bei der Zehnerüber- bzw. Unterschreitung zeigen. Zusätzlich falle es der Schülerin schwer, die verschiedenen Rechenarten zu unterscheiden.

Die von den Eltern und der Lehrerin beschriebenen Schwächen konnten in der schulpsychologischen Abklärung durch standardisierte Tests bestätigt werden. Ihre kognitive Leistungsfähigkeit war altersentsprechend entwickelt, ihr Sprachstand in Deutsch wies einige Schwächen auf. Ihr Arbeitstempo beim Rechnen war deutlich verlangsamt. Während Rechnungen im Zehnerbereich noch fehlerfrei gelangen, waren die meisten Lösungen mit Zehnerüber- bzw. Zehnerunterschreitungen falsch. Plusrechnungen gingen ihr dabei leichter von der Hand als Minusaufgaben. Bei Aufgabenstellung mit gemischten Rechenarten fiel es ihr schwer, diese zu unterscheiden und ihr Arbeitstempo wurde noch langsamer. Bei der qualitativen Beobachtung zeigte sich, dass Belinay beim Rechnen noch eine zählende Strategie verwendete. Aufgabenstellungen im Zahlenraum 10 konnte sie teilweise auf Abruf lösen. Alle Aufgaben mit Zehnerüberschreitung bearbeitete sie zählend. Dabei verwendete sie nicht offensichtlich ihre Finger, sie bewegte beim Rechnen aber leicht ihre Lippen. Darauf angesprochen bestätigte sie die Annahme, dass sie sich die Zahlen leise vorzählt um zu einem Ergebnis zu gelangen. Beim Rechnen mit zweistelligen Zahlen versuchte sie schon einige Rechenstrategien anzuwenden (Zehner zu Zehner und Einer zu Einer), jedoch unterliefen ihr häufig Fehler im Übertrag der Ergebnisse oder sie vermischte die Zehner- mit den Einerstellen.

Als schulische Maßnahme wurde eine intensive Förderung im Rechnen empfohlen. Eine Lehrperson mit spezifischer Ausbildung im Bereich Rechenförderung begleitete Belinay im zweiten Halbjahr. In kurzen Einzel- und Kleingruppensettings wurde mit der Schülerin insbesondere im Bereich der Zahlzerlegung, der Einspluseinsätze, dann weiterführend an der Orientierung im Zahlenraum (Zahlenstrahl, Mengenbilder, Hundertertafel) und beim Zehnerübergang (Einerwürfel, Fünfer- und Zehnerstangen) gearbeitet. Diese wurden mit dem Förderprogramm „Sicher unterwegs im Zahlenraum" (Merdian, 2013) durchgeführt. Zusätzlich wurden auch die Eltern in einem Einführungssetting beraten und bei der richtigen Förderung zuhause angeleitet und unterstützt. Die Klassenlehrerin wurde in der Umsetzung der Fördermaterialien im Unterricht geschult. Gerade bei Kindern mit mathematischen Schwierigkeiten ist es wichtig, dass die Förderung strukturiert und in allen Bereichen (Schule und Zuhause) mit den gleichen Konzepten durchgeführt wird, um das Kind nicht durch zu viele verschiedenen Rechenstrategien zusätzlich zu verwirren.

Da bei Belinay zusätzliche sprachliche Defizite vorhanden waren, wurde intensiv am Verständnis der mathematischen Begrifflichkeiten gearbeitet. Der Zugang zum Verständnis mathematischer Begriffe erfolgte dabei über die Verknüpfung der mathematischen Fachsprache (z. B. Ergänzen, Verdoppeln, Halbieren, Vermehren, Vermindern…) zur vertrauten Alltagssprache der Schülerin und mit Hilfe der Arbeit mit Plättchen. Dies diente zum Aufbau von Grundvorstellungen durch Handeln mit Materialen.

Nach intensiver Arbeit verbesserte sich ihre Rechenfertigkeit. Zwar fiel es Belinay teilweise noch schwer mit höheren Zahlenwerten zu arbeiten, sie konnte aber mit Hilfe der im Unterricht dargebotenen Materialien zu adäquaten Lösungen gelangen. Am Ende des zweiten Schuljahres wurde gemeinsam mit den Eltern entschieden, Belinay die zweite Klasse wiederholen zu lassen. Dies diente sowohl zum nochmaligen Vertiefen der Grundrechnungsarten, als auch zur zusätzlichen sprachlichen Förderung.

Die Wiederholung der zweiten Klassenstufe stellte sich im Nachhinein als gute Lösung dar. Die Schülerin schaffte es gut, in der neuen Klasse zu starten. Durch die intensive Förderung konnte sie viele Erfolgserlebnisse sammeln. Mit den ihr zu Verfügung stehenden Materialien bildete sie ein besseres mathematisches Verständnis auf und konnte ihren Wortschatz erweitern. Dadurch wurde sie selbstbewusster und offener in der Klasse und konnte das Klassenziel der zweiten Klasse erreichen.

Beobachtungsbogen Grundstufe II

Die folgenden Aufgabenstellungen sollten am Ende der 3. Schulstufe beherrscht werden. Die Beobachtung kann aber auch früher oder später erfolgen, indem man die Rechenbeispiele an die aktuelle Lernzielvorgabe anpasst.

Bitte markieren Sie die Inhalte, die das Kind bereits versteht bzw. lösen kann, mit einem Haken:

Beobachtungsbogen für LehrerInnen (Grundstufe II)		✓
1.	**Zählen**	
	a) Kann das Kind im Zahlenraum 1000 sicher vorwärts und rückwärts zählen?	
	b) Kann es in Zweierschritten, Fünferschritten, Zehnerschritten von beliebigen Ausgangszahlen vorwärts und rückwärts zählen?	
2.	**Orientierung im Zahlenraum**	
	a) Wird eine Zahl auf einem Zahlenstrahl / einem Maßband gefunden?	
	b) Kann das Kind Größenvergleiche zwischen dreistelligen Zahlen machen? Beispiel: „Wo steht die höhere Zahl?“ 189 oder 198 „Woran erkennst du das?“	
3.	**Stellenwertsystem**	
	a) Liest bzw. schreibt das Kind die Zahlen im Zahlenraum 1000 richtig? Beispiel: „Schreib die Zahl 324!“ (Mögliche Fehler: 30024, 342)	
	b) Kann das Kind folgende oder ähnliche Beispiele richtig lösen? 200 + 60 = ? (Möglicher Fehler: 800) 700 – 30 = ? (Möglicher Fehler: 400) 370 + 160 = ? (Möglicher Fehler: 413 ⟶ 3 + 1 = 4, 7 + 6 = 13)	
4.	**Über- bzw. Unterschreitungen im Zahlenraum 1000**	
	a) Kann das Kind folgende oder ähnliche Beispiele richtig lösen? 499 + 1 = ? (Möglicher Fehler: 599) 400 – 1 = ? (Möglicher Fehler: 300)	
	b) Kommt es zur richtigen Lösung, ohne zu zählen bzw. „Zählmaterial“ zu verwenden? (z. B. Finger, „inneres Zählen“)	
5.	**Addieren und Subtrahieren im Zahlenraum 1000**	
	a) Können **halbschriftliche** Rechnungen sicher und ohne zu zählen gelöst werden? z. B.: 328 + 217 = ? z. B.: 560 – 148 = ?	
	b) Kann das Kind nachvollziehbar machen, wie es rechnet? (z. B. auf dem Rechenstrich)	
	c) Können **schriftliche** Additionen und Subtraktionen sicher gelöst werden? Mögliche Fehler: Verwechslung mit Additionen, „Kippfehler“ ⟶ z. B. 54 – 27 = 33 ⟶ Das Kind rechnet 5 – 2 = 3 und 7 – 4 = 3	

Beobachtungsbogen für LehrerInnen (Grundstufe II)		✓
6.	**Multiplizieren und Dividieren als besondere Fehlerquelle**	
	a) Beherrscht das Kind das schriftliche Multiplizieren sicher? Mögliche Fehler: Schwierigkeiten beim Einmaleins, Vergessen des „Übertrags“, Probleme mit der 0 (z. B. 3 × 0 = 3)	
	b) Kann das Kind Rechnungen mit einstelligem Divisor lösen?	
7.	**Rechenprozeduren**	
	Versteht das Kind die Prinzipien Dazugeben, Wegnehmen, Vervielfachen und Aufteilen? Hat es die Sachinhalte der Grundrechnungsarten verstanden? Beispiele: „Zeige mir, wie du 3 × 5 = 15 mit Material auflegst.“ „Zeige mir, wie du 20 : 4 = 5 mit Material auflegst.“	
8.	**Maßeinheiten**	
	a) Ist ein Modellverständnis der Maßeinheiten vorhanden? – Umrechnung Geldmaße, Zeitmaße, Längenmaße, Massenmaße	
	b) Kann das Kind Größen realistisch einschätzen? (Z. B. die Länge eines Klassenzimmers)	
9.	**Sachaufgaben**	
	a) Weiß das Kind die Grundrechenarten in den Sachaufgaben richtig anzuwenden?	
	b) Zeigt es eine planvolle und überlegte Herangehensweise?	

Fallbeispiel

Peter, 10 Jahre
Beispiel für ein Kind mit Rechenschwierigkeiten
Grundstufe II

Peter wurde zur schulpsychologischen Untersuchung am Ende der dritten Klasse Volksschule angemeldet. Peter konnte die dritte Schulstufe nur knapp positiv abschließen, obwohl er diese schon wiederholt hatte. Die Klassenwiederholung habe aufgrund schlechter Leistungen im Rechnen stattgefunden. Zu Beginn sei das Wiederholungsjahr auch gut angelaufen, jedoch seien ab Mitte der dritten Klasse erneut Schwierigkeiten im Rechnen aufgetreten.

Die Eltern beschrieben Peter als sehr selbstständigen Jungen, der sich nicht gerne helfen lasse. So bestehe er darauf, die Hausaufgaben alleine zu erledigen und lehne Unterstützung von den Eltern ab. Die Eltern hätten auch Nachhilfestunden organisiert, die er aber schnell als unnütz empfunden habe. Am Beginn der Klassenwiederholung sei das Schuljahr gut angelaufen, und die Eltern und die Klassenlehrerin waren mit den Leistungen zufrieden. Leider hätten sich dann aber im Halbjahr wieder Probleme beim Rechnen gezeigt.

Bei der Anamnese zeigten sich keine besonderen Auffälligkeiten in der Entwicklungsgeschichte. Peter sei schon immer sehr aufgeweckt und abenteuerlustig gewesen. Stillsitzen falle ihm schwer. Dennoch sei er gut in die Schule gestartet. Erste leichte Probleme hätten sich in der zweiten Klasse im Rechnen gezeigt. Dieses Fach habe Peter immer wieder herausgefordert. Die Mutter erzählte dabei, dass sie selbst in der Schule beim Rechnen Probleme gehabt hätte und sie dieses Fach nie gemocht habe.

Bei der schulpsychologischen Testung war Peters kognitive Leistungsfähigkeit der Altersnorm entsprechend. Eine individuelle leichte Schwäche zeigte sich im Arbeitsgedächtnis. Bei den Rechentests wurde deutlich, dass Peter keine Schwierigkeiten hatte, sich im Zahlenraum bis 1000 zu orientieren. Deutliche Unsicherheiten zeigten sich jedoch beim schriftlichen Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren. Peter hatte offensichtlich Probleme, die richtigen Rechenprozeduren abzurufen. So kam es vor, dass er z. B. beim Subtrahieren einfach die Kleinere von der größeren Zahl abzog. Beim Multiplizieren waren die Malreihen nur unsicher abrufbar, und zu Beginn war er nicht sicher, mit welcher Zahl er beginnen sollte. Das Dividieren gelang nur zäh und mit vielen Unsicherheiten. Besonders die Nullstellen bereiteten ihm Schwierigkeiten. Einfache Textaufgaben konnte er gut umsetzen, bei komplexeren Aufgabenstellungen hatte er einige Probleme, die richtige Rechenprozedur zur Aufgabe zu finden. Bei Nachfrage, ob er den Vorgang der Multiplikation oder Division erklären oder mit Hilfe einer Zeichnung darstellen könne, gelang ihm dies nicht.

Hier wurde deutlich, dass Peter enorme Probleme im prozeduralen Verständnis hatte – das Operationsverständnis für die Multiplikation und Division war nicht vorhanden. Dazu kamen noch Unsicherheiten mit der Null, was auf Defizite im Bereich des dekadischen Stellenwertsystems hinweist. Um dieses dekadische Wissen zu stärken, wurde intensiv mit der Stellentafel gearbeitet. Mit verschiedenen Übungen und Spielen wurde versucht, Faktenwissen zum kleinen Einmaleins aufzubauen. Dazu wurde das Fördermaterial „Das Käfer 1×1“ (Merdian, 2005) verwendet. Nach Aufbau des Verständnisses der Multiplikation wurde weiter am Zusammenhang der Division gearbeitet. Anschließend wurde das korrekte Vorgehen bei schriftlichen Multiplikationen und Divisionen schrittweise erarbeitet und regelmäßig wiederholt.

Bei der Untersuchung stellten sich auch unterdurchschnittliche Leistungen im Arbeitsgedächtnis heraus. Hier wurde mit Hilfe verschiedener visueller und auditiver Merkspiele versucht, die Gedächtnisleistung nachhaltig zu verbessern. Um das konzentrierte Arbeiten in Schritten zu üben, nahm Peter an einem Konzentrationstraining teil (Marburger Konzentrationstraining, Borgmann 2011).

Mit Hilfe des intensiven Übens und Wiederholens sowie der Teilnahme am Konzentrationstraining konnte Peter seine Leistungen im Rechnen schrittweise verbessern. Im Unterricht durfte er zusätzliche Materialen, die in den Übungseinheiten eingeführt wurden, verwenden. Dies gab Peter mehr Sicherheit bei der Bearbeitung der Aufgaben, auch in Prüfungssituationen. So schaffte er es, die vierte Klasse Volksschule erfolgreich abzuschließen.

Flächendeckende Erhebungen

Im Rahmen des Pädagogik-Pakets stehen den Schulen standardisiere Diagnoseinstrumente, wie zum Beispiel die Kompetenzraster – die eine zusätzliche Einschätzung des Lern- und Entwicklungsstandes der Schüler/innen ermöglichen – zur Verfügung.

Kompetenzraster sind ein pädagogisches Instrument für Lehrpersonen, die die Kompetenzbeschreibungen des Lehrplans konkretisieren und auch für den Unterrichtsgegenstand Mathematik ab der 1. bis zur 8. Schulstufe im Unterrichtsprozess eingesetzt werden können. Der kompetenzorientierte Unterricht wird mit Kompetenzrastern in einem umfassenden Sinn gefördert, die Zielperspektive im Unterricht gestärkt und somit der Blick auf die Unterrichtsentwicklung geschärft, indem anhand der Kompetenzraster auch die Zielerreichung – die mit dem eigenen Unterricht verfolgt wird – reflektiert werden kann. In den Kompetenzrastern werden primär die Anforderungen und Zielsetzungen für die jeweiligen Schulstufen auf Basis des Lehrplans verdeutlicht. Damit können auch Kompetenzzuwächse über einen längeren Zeitraum beobachtet werden. Kompetenzraster können somit als eine gute und auch zusätzliche Hilfestellung für die pädagogische Diagnostik von Rechenschwierigkeiten dienen. Wird der Eindruck gewonnen, dass Schüler/innen bestimmte Kompetenzen noch nicht ausreichend erworben haben, können auf individueller Ebene weitere pädagogische Fördermöglichkeiten angeboten werden. Kompetenzraster für den Unterrichtsgegenstand Mathematik (1. bis 8. Schulstufe) findet man bei den „Materialien zu den Unterrichtsgegenständen“ auf der Pädagogik-Paket-Website: https://www.paedagogikpaket.at/massnahmen/lehrplaene-neu/materialien-zu-den-unterrichtsgegenständen.html

Literatur

Born A., Oehler C. (2020) Kinder mit Rechenschwäche erfolgreich fördern; 6. überarbeitete Auflage, Verlag Kohlhammer

Gaidoschik M. (2002) Rechenschwäche – Dyskalkuie Eine unterrichtspraktische Einführung für LehrerInnen und Eltern. Wien öbv&hpt Verlagsgembh & Co.KG

Merdian G. Sicher unterwegs im Zahlenraum (Förderhefte Teil 1 bis Teil 6) Verlag PaePsy

Sekundarstufe I und II

Pädagogische Diagnostik der Rechenschwäche in Sekundarstufe I und II

Mathematik-Lehrkräfte stehen in der Sekundarstufe vor der diagnostischen Frage: Liegen die schwachen Mathematikleistungen in einem mangelnden Verständnis der stofflichen Inhalte der Sekundarstufe begründet oder beruhen sie auf Defiziten aus der Grundschulmathematik? (Steinecke, Martin, 2022). Laut Dögnitz (2020) ist der Mathematikunterricht spiralförmig aufgebaut. Das meint, dass man auf verschiedenen Niveaus immer wieder zu ähnlichen Problemen und Themen gelangt (z. B. Teil-Ganzes-Struktur im Zahlenraum 10 – Stellenwertsystem – Dezimalbrüche). Bereits Gelerntes wird unmittelbar für neue Inhalte benötigt und vorausgesetzt. Fehlende Basiskompetenzen aus der Grundstufe sind zu einem Großteil für Rechenschwierigkeiten in der Sekundarstufe verantwortlich. Demnach orientiert sich die pädagogische Diagnostik in der Sekundarstufe an den aufbauenden Kompetenzen der Primarstufe: Die Basis hat Vorrang und muss überprüft werden, nicht alleine die Rechenergebnisse, sondern wie Schüler/innen an das Ergebnis gelangen, welche Strategien und Rechenprozeduren eingesetzt werden.

Arten von Verfahren zur Erfassung von Rechenleistungen

Für die pädagogische Abklärung einer Rechenschwäche unterscheidet man nach Landerl (2022) zwischen **Schulleistungstests**, die der Identifikation von rechenschwachen Schülerinnen und Schülern dienen sollen, **förderdiagnostischen Verfahren** zur Erstellung von Interventionsprogrammen, die sich an neurokognitiven Entwicklungsmodellen orientieren und **Früherkennungsverfahren**, die das basale Verständnis für Zahlen- und Rechenkonzepte überprüfen (Landerl, 2022, S. 155). Außerdem wird zwischen Einzel- und Gruppen- bzw. Klassentestverfahren unterschieden.

Ulm (2022) differenziert zwischen produktorientierten und prozessorientierten Verfahren, was einer Klassifizierung in Schulleistungstest und förderdiagnostischen Verfahren entspricht: **Produktorientierte Rechentests** enthalten kurze arithmetische Aufgaben verschiedener Typen. Registriert wird der Anteil richtiger Endergebnisse. Die Rechenwege werden in der Regel nicht erfasst. Derartige Tests eignen sich, um in einer Gruppe (z. B. einer Jahrgangsstufe) potentiell rechenschwache Schüler/innen zu identifizieren. Bei standardisierten Rechentests kann das Testresultat zur Gesamtpopulation Gleichaltriger in Bezug gesetzt werden. Beispiele für produktorientierte, standardisierte Testverfahren in der Sekundarstufe sind der Deutscher Mathematiktest (DEMAT), der Eggenberger Rechentest (ERT) oder die Bamberger Dyskalkulie Diagnostik (BADYS).

Prozessorientierte Diagnoseverfahren geben nicht nur über Fehler, sondern auch über die Lösungsstrategien und Denkprozesse beim Rechnen Hinweise. Damit sind prozessorientierte Verfahren auch für die Förderplanung einsetzbar (Ulm, 2022).

Als Beispiele für prozessorientierte Diagnoseverfahren in der Sekundarstufe sind die förderdiagnostischen Tests für Klasse 5 und 6 des Zentrums zur Therapie von Rechenschwäche (ZTR) zu nennen, oder als aktuelleres Verfahren das Leipziger Diagnostikum arithmetischer Basiskompetenzen LeDi-Arithmetik (Dögnitz, 2022) sowie das Bayreuther Testpaket. Eine Liste aktueller Verfahren findet sich hier: Rechenschwierigkeiten – Schulpsychologie – Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Flächendeckende Kompetenzerhebung zum Zwecke der Förderdiagnostik

Seit dem Schuljahr 2022/23 wird im Rahmen der individuellen Kompetenzmessung PLUS (iKMPLUS) in den Basismodulen die Mathematikkompetenz der Schüler/innen auf der 7. Schulstufe und – ab 2023/24 – auch auf der 8. Schulstufe in Österreich flächendeckend erhoben. Die Ergebnisse dienen unter anderem der Beobachtung des Lernfortschritts der Schüler/innen und liefern Hinweise auf mögliche weitere Förderbedarfe.

Gemessen wird dabei die Erreichung der Bildungsstandards in Handlungsbereichen, wie:

- Darstellen und Modellbilden (H1)
- Rechnen, Operieren (H2)
- Interpretieren (H3)
- Argumentieren, Begründen (H4)

Ergänzend zu den Basismodulen ermöglicht das Durchführungsangebot der Fokusmodule eine vertiefende und gezielte Förderdiagnostik bei auffallenden Lernstärken und Lernschwächen.

Die iKMPLUS dient ausschließlich der Förderdiagnostik. Sie ist kein Instrument der klinischen Diagnostik und eignet sich nicht für die Feststellung einer Dyskalkulie. Sie kann aber erste Hinweise auf möglich Rechenschwierigkeiten geben, an die diagnostische Untersuchungen anschließen können.

https://www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/bef/ikmplus.html

https://www.iqs.gv.at/themen/nationale-kompetenzerhebung/ikm-plus-sekundarstufe

Klinisch-psychologische Erhebungen

Die Anforderungen und Rahmenbedingungen für eine klinisch-psychologische Diagnostik zur Abklärung der Rechenschwierigkeiten verläuft analog zur Primarstufe: Bleiben bei der pädagogischen Förderdiagnostik Fragen offen, sollte eine weiterführende Klinisch-psychologische Abklärung erfolgen.

Lehrkräfte können diesen Prozess empfehlen, die Entscheidung liegt bei den Erziehungsberechtigten und bedarf der Freiwilligkeit. Als Gutachter/innen kommen ausgebildete Klinische Psycholog/inn/en in Frage, die einschlägiges Wissen in diesem Fachbereich aufweisen. Bei Bedarf ist die Schulpsychologie Anlaufstelle für Kontakte.

Fallbeispiel

Katarina, 13,5 Jahre
Beispiel für eine Schülerin mit Rechenschwierigkeiten
Sekundarstufe I

Die Kindesmutter berichtete, dass ihre Tochter ein Gymnasium besuchte und derzeit in Mathematik auf einem Nicht Genügend stünde. Das Mädchen hätte bereits das vorhergehende Schuljahr nach einer nicht bestandenen Wiederholungsprüfung mit Nicht Genügend in Mathematik abgeschlossen. Katarina hätte trotz regelmäßiger Nachhilfe und Förderung bisher keine positive Beurteilung in Mathematik erhalten. Die Motivation und das schulische Selbstvertrauen des Mädchens wären dementsprechend angeschlagen.

Katarina präsentierte sich im Laufe der Untersuchung als freundlich, offen und kooperativ. Die Testaufgaben bearbeitete sie konzentriert und bemüht. Das Instruktionsverständnis war gut gegeben. Das Mädchen wirkte aufgrund des schulischen Drucks emotional sehr belastet und war den Tränen nahe, wenn es um ihre schulischen Leistungen ging.

Die Intelligenztestung ergab, dass Katarinas kognitive Leistungsfähigkeit insgesamt im altersentsprechenden Normbereich lag. Schwächen zeigten sich jedoch im Arbeitsgedächtnis und im Bereich der visuell-räumlichen Vorstellung.

Im ERT JE Rechentest zeigte sich, dass Katarina bei den Ordnungsstrukturen (Orientierung im Zahlenraum, Bruch- und Dezimalzahlen ordnen) keine Probleme hatte. Schwierigkeiten zeigten sich beim schriftlichen Addieren und Multiplizieren (Arithmetische Fertigkeiten). Katarina arbeitete hier ungenau, schrieb teilweise fehlerhaft ab und verrechnete sich vor allem beim schriftlichen Multiplizieren häufig. In den Bereichen Größenbeziehungen und Angewandte Mathematik traten gesamt ebenso große Schwierigkeiten auf. Im Bereich der mehrschrittigen Textaufgaben zeigten sich ebenfalls Schwächen. Katharina verstand die Angaben häufig nicht auf Anhieb.

Für ein Rechentraining wurde Material empfohlen, das an der Basis der Schwierigkeiten ansetzt und die arithmetischen Fertigkeiten gezielt fördert. Eine weitere Überprüfung des Lesesinnverständnisses und gegebenenfalls Training wurde empfohlen.

Literatur:

Dögnitz, Susanne (Hg.) (2022): Diagnostik von besonderen Rechenschwierigkeiten in der Sekundarstufe I. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Dögnitz, Susanne (2020): Diagnostische Aufgaben zum Erkennen von Rechenschwäche im Klassenverband. In: Andreas Frank, Stefan Krauss und Karin Binder (Hg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2019. 53. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. Münster: WTM Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Gaidoschik, Michael (2021): Rechenschwäche-Dyskalkulie. Eine unterrichtspraktische Einführung für LehrerInnen und Eltern. 12. Auflage. Hamburg: Persen.

Landerl, Karin; Vogel, Stephan; Kaufmann, Liane (2022): Dyskalkulie. Modelle, Diagnostik, Intervention. 4., überarbeitete und erweiterte Auflage. München: UTB; Ernst Reinhardt Verlag (utb, 3066).

Steinecke, Annalisa; Martin, Maximilian (2022): Bayreuther Testpaket zur Erfassung von Rechenschwäche im Mathematikunterricht. Hg. v. Volker Ulm und Carsten Miller. Bayreuth (Mathematikdidaktik im Kontext, 8). Online verfügbar unter https://epub.uni-bayreuth.de/6616/.

Ulm, Volker (2022): Rechenschwäche in der Sekundarstufe, Diagnostik und Förderung von Schülerinnen und Schülern. 2. Auflage. Bayreuth: Universität Bayreuth (Mathematikdidaktik im Kontext, 5). Online verfügbar unter https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bvb:703-epub-6623-2.

ZTR Zentrum zur Therapie von Rechenschwäche: Microsoft Word - Förderdiagnostischer Rechentest Klasse 6 Auswertung.docx. Online verfügbar unter https://www.ztr-rechenschwaeche.de/wp-content/uploads/2021/10/Foerderdiagnostischer-Rechentest-Klasse-6-Auswertung.pdf, zuletzt geprüft am 07.03.2023.

4 Leistungsfeststellung und Leistungsbeurteilung

Prinzipien der Leistungsfeststellung und Leistungsbeurteilung

Chancengerechtigkeit und Durchlässigkeit sind wichtige Zielsetzungen im österreichischen Schulsystem. Die meisten Kinder mit Rechenschwierigkeiten erreichen aus unterschiedlichen Gründen (siehe auch Kapitel Schwierigkeiten beim Rechnenlernen) nicht die schulischen und beruflichen Ziele, die sie aufgrund ihrer Intelligenz in der Lage wären zu schaffen. Die Nichtberücksichtigung der Rechenschwierigkeiten kann sich nachteilig z. B. durch frühzeitigen Schulabbruch auf die Bildungslaufbahn, auf die Lebensgestaltung und auf die psychische Gesundheit auswirken.

Um einheitliche Rahmenbedingungen zu schaffen, wurden mit dem Rundschreiben 27/2017 des Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Forschung Richtlinien für den Umgang mit Rechenschwierigkeiten im schulischen Kontext veröffentlicht. (Siehe Rundschreibendatenbank des BMBWF: https://rundschreiben.bmbwf.gv.at/rundschreiben/?id=768)

Eine Chancengleichheit im schulischen Kontext umfasst mit dem Begriff Rechenschwierigkeiten hierbei sowohl die Rechenschwäche als auch die Rechenstörung nach WHO-Definition (ICD-10, ICD-11). Folglich sind bundesweit einheitliche Rahmenbedingungen und Unterstützungsmöglichkeiten in der Leistungsfeststellung und der Leistungsbeurteilung laut genanntem Rundschreiben für alle Schüler/innen mit Rechenschwierigkeiten in allen Schularten und Schulstufen entsprechend der geltenden Rundschreiben und dieser Handreichung umzusetzen.

Zielsetzungen

- Bundesweit sollen einheitliche Richtlinien für Schulen im Umgang mit Rechenschwierigkeiten Rechtssicherheit über die gesamte Schullaufbahn hinweg geben.
- Information über die Möglichkeiten der Ausschöpfung des Lehrplans und der Leistungsbeurteilungsverordnung zur individuellen Förderung von Schülerinnen und Schülern mit Rechenschwierigkeiten
- Sensibilisierung für die zentrale Bedeutung eines Unterrichts, der mathematisches Verständnis ermöglicht und die Früherkennung von Rechenschwierigkeiten in den Mittelpunkt stellt, um dadurch die Chancengerechtigkeit und die Durchlässigkeit im Schulsystem zu erhöhen

Störungsbezogene Ausschöpfung der gesetzlich vorgesehenen Möglichkeiten

Für das Berücksichtigen der Rechenschwierigkeiten entsprechend der angeführten Maßnahmen ist ein klinisch-psychologisches Gutachten nicht nötig. Die besondere Berücksichtigung der Rechenschwierigkeiten, unabhängig davon, ob ein Gutachten vorliegt, ergibt sich durch eine intensive, störungsbezogene Ausschöpfung der gesetzlich vorgesehenen Möglichkeiten der Leistungsfestellung und Leistungsbeurteilung zur individuellen Förderung.

Die störungsbezogene Ausschöpfung der gesetzlich vorgesehenen Möglichkeiten besteht in:

- Ermutigung und Motivation
- hilfreichen Rückmeldungen über den Leistungsstand, die Art der Fehler, Hilfen zur Vermeidung der Fehler, die erreichten Ziele, die noch nicht erreichten Ziele und die Wege dorthin etc.
- Beratung/Information der Erziehungsberechtigten über die Verbesserung der Leistung durch Schullaufbahnentscheidungen bzw. Förderüberlegungen
- Berücksichtigung aller Leistungsfeststellungsquellen, insbesondere derer, bei denen keine schriftliche Leistung notwendig ist, d. h. mündliche, praktische und grafische Formen sowie die Mitarbeit
- Einbau von Übungsmöglichkeiten
- ressourcenorientierte, individuelle Leistungsfeststellung (z. B. Schaffung von Situationen, in denen der Schüler/die Schülerin sein/ihr Leistungspotenzial bestmöglich entfalten kann; etwa in einer Kleingruppe)
- Mitarbeitsfeststellungen dürfen nur ein sehr eng umgrenztes Stoffgebiet umfassen, das erst kürzlich behandelt worden ist (z. B. Stundenwiederholung) und dürfen – wenn sie schriftlich durchgeführt werden – höchstens zwei bis drei Minuten dauern.
- Bei mündlichen Leistungsfeststellungen kann praktisches Material (z. B. Rechenhilfen) zugelassen werden.
- Berücksichtigung von weiteren stressreduzierenden Maßnahmen wie Verwendung spezieller Veranschaulichungs- und Handlungsmaterialien (z. B. Zehnerfeld und Plättchen, Stellenwertmaterial), Ausweitung der Bearbeitungszeit und zusätzliche Pausen; übersichtliche und einfach strukturierte Aufgabendarbietung, alternative Präsentation von Aufgaben
- Verwendung weiterer didaktischer und technischer Hilfsmittel, insbesondere bei mehrschrittigen, komplexen Aufgabenstellungen (z. B. Einmaleinstabellen, Taschenrechner) sowie persönliche Unterstützung durch die Lehrkraft (z. B. Bearbeitungshilfe bei Sach- und Textaufgaben) etc.

Das Vorliegen einer Rechenschwierigkeit stellt keinen hinreichenden Grund für die Beantragung eines sonderpädagogischen Förderbedarfs dar, sondern erfordert in erster Linie die Ausschöpfung aller angeführten Maßnahmen und Möglichkeiten.

Bei Schüler/inne/n mit einer durch ein klinisch-psychologisches Gutachten bestätigten Rechenstörung (ICD-10 F81.2) oder Kombinierten Störungen schulischer Fertigkeiten (ICD-10 F81.3) bzw. (nach der neuesten ICD-11 Version) einer Lernentwicklungsstörung mit Beeinträchtigung in Mathematik (ICD-11 6A03.2) sind § 18 Abs. 6 SchUG bzw. § 2 Abs 4 und § 11 Abs 8 LBVO anzuwenden, d. h. zusätzlich zu den allgemeinen Fördermaßnahmen kann ein Zeitzuschlag gewährt werden. Es ist auch der Einsatz von Hilfsmitteln als Einzellösung möglich.

Standardisierte Reifeprüfung (SRDP)

Bei der standardisierten Reifeprüfung ist es im Falle der Rechenschwierigkeiten nicht notwendig, dass die Rahmenbedingungen am Prüfungsstandort angepasst werden. Siehe Rundschreiben Nr. 11/2021 – https://rundschreiben.bmbwf.gv.at/rundschreiben/?id=1011

Aktuelle Informationen sind zu finden unter www.schulpsychologie.at.

5 Leitgedanken für den Umgang mit Rechenschwierigkeiten am Schulstandort

In Kooperation mit dem Berufsverband Akademischer Legasthenie-Dyskalkulie-TherapeutInnen (BALDT) wird ein Vorschlag für ein Leitbild im Umgang mit Rechenschwierigkeiten am Schulstandort dargestellt. Diese Zusammenschau kann für transparente, schulinterne Maßnahmen zum Erkennen, Berücksichtigen und Fördern bei Rechenschwierigkeiten pro Schulstandort adaptiert werden. Die anschließende Dokumentvorlage dient als Diskussionsgrundlage für den Schulstandort zur Festlegung eines einheitlichen Umgangs mit Rechenschwierigkeiten. Eine digitale Version ist auch auf der Homepage www.schulpsychologie.at und des BALDT lrs-therapeuten.org abrufbar.

1 Grundsatz

An unserer Schule ist es allen Pädagoginnen und Pädagogen ein Anliegen, Kindern mit Rechenschwierigkeiten die größtmögliche Unterstützung beim Rechenerwerb zu geben. Es ist uns bewusst, dass Kinder mit Rechenschwierigkeiten mehr leisten müssen als Kinder, die keine Schwächen in diesem Bereich aufweisen.

Nachstehende Begriffe werden synonym betrachtet und als gleichwertiger Bedarf einer individuellen Unterstützung verstanden: Dyskalkulie, Rechenstörung, Rechenschwierigkeiten, Rechenschwäche, Lernstörung mit Beeinträchtigung beim Rechnen, Lernentwicklungsstörung mit Beeinträchtigung in Mathematik.

Das Erkennen der Symptomatik

- Deutliche Schwierigkeiten im Zahlen- und Mengenverständnis: z. B. Vergleich von Zahlen (größer / kleiner) und Mengen (mehr / weniger), einer Menge von Objekten werden falsche Zahlen zugeordnet, einstellige arabische Zahlen können nicht benannt werden, Schätzen einer kleinen Menge von Objekten gelingt nicht, …
- Probleme bei Zählfertigkeiten: z. B. Fehler beim freien Zählen oder Abzählen von konkreten Objekten, Vorwärts- und Rückwärtszählen, …
- Schwierigkeiten mathematisches Faktenwissen aufzubauen und schnell abzurufen: z. B. Zahlenzerlegungen im Zahlenraum 10, Einspluseins, Einmaleins, …
- Fehlerhafte Einsicht in das dekadische Stellenwertsystem: z. B. Schwierigkeiten beim Bündeln / Entbündeln von Zahlen, Zahlendreher beim Lesen und Schreiben von Zahlen, …

- Schwierigkeiten bei grundlegenden Rechenarten wie Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division: z. B. einfache Additions- und Subtraktionsaufgaben, auch mit anschaulichen Objekten, werden fehlerhaft gelöst, Zehnerüber- und Zehnerunterschreitung erfolgen durch zählende Rechenstrategien, …
- mangelhafte Vorstellungen und fehlerhafte mathematische Denkweisen
- hohe Fehleranzahl
- höherer Zeitaufwand beim Lösen von Rechenaufgaben

Dieses Erkennen ist Teil unserer fachlichen Qualifikation als Lehrpersonen, wobei a) Risikofaktoren bereits ab Schuleintritt beobachtet werden können, b) fachliche Berater/innen seitens der Bildungsdirektion (z. B. der Schulbehörde, der Schulpsychologie) zu Rate gezogen werden können. Beobachtete Abweichungen im Erwerb dieser Kulturtechniken werden dokumentiert und mit den Eltern besprochen. Sobald konsensual (gegebenenfalls mit Unterstützung von weiteren Stellen) Schwächen festgestellt werden, wird von Rechenschwierigkeiten und nötiger zielgerichteter Förderung gesprochen und als solche für Kind, Schule und Eltern nachweislich dokumentiert. Die Eltern werden über Förderschritte informiert, die Förderung im Rahmen des Regelunterrichts und etwaige darüberhinausgehende (von den Eltern initiierte) Maßnahmen als Trainingsplan dokumentiert.

2 Leistungsfeststellung und Leistungsbeurteilung

Für das Kollegium in der Schule ist es wichtig, dass wir alle vorgesehenen Möglichkeiten zur Leistungsfeststellung und Leistungsbeurteilung miteinbeziehen. Es gilt dem Kind den Leidensdruck und die Angst vor Versagen zu nehmen und ihm Zuversicht zu geben. Daher erfolgt die Berücksichtigung der Rechenschwierigkeiten durch eine umfassende Ausschöpfung der vorgesehenen Möglichkeiten entsprechend der gesetzlichen Bestimmungen:

- Schulunterrichtsgesetz, BGBl. Nr. 472/1986, insbesondere §§18, 20, 31a
- Leistungsbeurteilungsverordnung, BGBl. Nr. 371, insbesondere §2, §3 (Alle darin angeführten Formen der Leistungsfeststellung werden berücksichtigt und grundsätzlich als gleichwertig angesehen), §4, §11, §14, §15, §16. (Für die Beurteilung von Schularbeiten sind folgende fachliche Aspekte maßgebend: Mathematik – gedankliche Richtigkeit, sachliche bzw. rechnerische Richtigkeit, Genauigkeit; darstellende Geometrie – gedankliche Richtigkeit, sachliche Richtigkeit, Genauigkeit) und §20
- Rundschreiben 27/2017: Richtlinien für den schulischen Umgang mit Schülerinnen und Schülern mit Schwierigkeiten beim Rechnenlernen
- Handreichung: Der schulische Umgang mit Rechenschwierigkeiten

Für uns ist dabei wesentlich, dass für schriftliche Arbeiten / schriftliche Leistungsfeststellungen der Abruf des Faktenwissens nicht alleine die Benotung ausmacht. Wir erkennen dabei an, dass Kinder mit Rechenschwierigkeiten durch den fehlenden automatisierten Faktenabruf ineffektive Strategien nützen müssen, wodurch sie mehr

Zeit benötigen. Wir berücksichtigen für die Beurteilung ebenso Gedankenrichtigkeit, Sachlichkeit, grafische Darstellung, ordentliche Ausführung von Zeichnungen sowie den Rechenweg / Lösungswege (Zwischenergebnisse), sodass defizitäre Leistungen im Bereich des Faktenwissens allein nicht zwingend eine negative Benotung in einer schriftlichen Leistungserbringung (z. B. Mathematik-Schularbeit) ergeben.

Wir legen Wert darauf, bei der Leistungsfeststellung und Leistungsbeurteilung auf die Lösungsschritte, auf die Zwischenergebnisse, auf die Mitarbeit und auf regelmäßige Rückmeldungen über den Leistungsstand besonders zu achten.

3 Individuelle Unterstützungsmöglichkeiten im Schulsetting

An unserer Schule erarbeiten wir zusammen mit dem Kind und in Absprache mit dem Kollegium, den Eltern und gegebenenfalls zusätzlichen Expert/inn/en wie beispielsweise Schulpsycholog/inn/en, Beratungslehrer/inne/n und BALDT-Therapeut/inn/en individuelle Unterstützungsmaßnahmen. Diese können beinhalten:

Mathematik

- Im Unterricht ausreichend Zeit zur Bearbeitung von Rechenaufgaben geben
- Vorlesen von Arbeitsaufträgen, wenn eine Lesestörung/-schwäche vorliegt
- klare und gut verständliche Formulierungen / Aufgabenstellungen
- Verlängerung der Bearbeitungszeit bei (schriftlicher) Leistungserbringung
- Aufgabenstellungen oder Arbeitsblätter in der Schule kürzen
- Aufgabenstellungen oder Arbeitsblätter für die Hausübung im Umfang kürzen
- (Temporäre) Arbeit im Unterricht und zuhause mit unterstützenden Handlungsmaterialien erlauben (z. B. Rechenhilfen: Zehnerfeld und Plättchen / Rechenschiffchen, Stellenwertmaterial, Malreihen-Tafel, Hundertertafel, Perlenketten u. a.), sofern verstehensorientiert didaktisch angewendet
- Bei Leistungsfeststellungen praktisches Handlungsmaterial erlauben
- Spezielle Hilfsmittel (z. B. Taschenrechner) erlauben
- Sach- und Textaufgaben: Text vorlesen, Besprechen und Erklären von Begriffen und Zusammenhängen, Darstellen mit Material, grafische Bearbeitungshilfen
- Im Unterricht und bei der schriftlichen Leistungserbringung auch beim Kopfrechnen die Möglichkeit für schriftliche Notizen (Zwischenergebnisse) zur Entlastung des Arbeitsgedächtnisses geben
- Defizite im Faktenwissen bei mehrschrittigen Aufgaben durch die vorübergehende Verwendung von Einspluseins- und Einmaleinstafeln ausgleichen, bis das Faktenwissen ausreichend stabil ist
- Angaben (z. B. Arbeitsaufträge, Sachtexte, Textaufgaben) vorlesen – auch bei schriftlicher Leistungserbringung, wenn eine Lesestörung/-schwäche vorliegt
- Ressourcenorientierte, individuelle Leistungsfeststellung (z. B. Schaffung von Situationen, in denen die Schüler/innen ihr Leistungspotenzial bestmöglich entfalten können)

- Sehr eng umgrenztes Stoffgebiet, das erst kürzlich behandelt worden ist, für mündliche / schriftliche Leistungserbringungen
- Klare und gut verständliche Formulierungen / Aufgabenstellungen
- Layout von Arbeitsblättern / Schularbeiten / Tests anpassen: größere Schrift (mind. 14 pt.), gut lesbare Schrift (keine Serifen), größerer Zeilenabstand (z. B. 1,5-facher Zeilenabstand), klar strukturierte Aufgaben (keine unnötigen Ablenker wie Bilder), ausreichend Platz für Notizen / Skizzen, …
- Uhrzeiten / Termine schriftlich bekannt geben
- …

Realien, kreative und bildnerische Fächer, darstellende Geometrie, Ernährung und Haushalt usw.

- Berücksichtigen, dass die Umwandlung von Maßen beeinträchtigt sein kann (z. B. Abmessen von Werkstücken, Abwiegen von Zutaten…)
- Berücksichtigen, dass in Alltagssituationen (z. B. Klassenkasse, Schulbuffet) der Umgang mit Geld beeinträchtigt sein kann
- Berücksichtigen, dass Zeit- und Datumsangaben (z. B. Treffpunkt für Ausflüge, …) schlechter verständlich sein können
- …

Zur Prüfung, ob die Maßnahme für Kind und Leistungserbringung von Vorteil sind, bedarf es eines Zeitraumes von mindestens __________ (z. B. 1 Monat).

4 Förder- und Beratungsmöglichkeiten im schulischen Setting

Förderung im Bereich Rechnen bezieht sich evidenzbasiert immer auf die zu übende Funktion – also die mathematischen Bereiche, in denen die Defizite vorliegen.

Folgende Maßnahmen werden bei uns an der Schule bei Rechenschwierigkeiten angeboten (bitte hier Auswahl angeben, die realistisch umgesetzt werden kann):

- Rechenförderkurse für Kinder mit geringen Rechenleistungen (mit und ohne Gutachten)
- Rechenbuddy
- Beratung der Eltern zum häuslichen Üben
- Beratung der Eltern zu außerschulischen Angeboten
- …

5 Netzwerk im externen Setting

Die Zusammenarbeit zwischen Schule und Elternhaus verstehen wir als professionelles Handeln. Wir klären gemeinsam, wie in Zukunft mit den Lernproblemen effizient umgegangen werden kann. Sollten Schüler/innen eine Dyskalkulie-Therapie besuchen, legen die Therapeut/inn/en und wir Wert auf eine gute Zusammenarbeit sowie einen kontinuierlichen Austausch. Durch die enge Zusammenarbeit kann bei der Beurteilung noch genauer auf das Kind eingegangen werden (z. B. das Bemühen des Kindes und die Fortschritte zählen zur Mitarbeit). Unsere Schule ist – falls schulische Maßnahmen nicht ausreichen und sich Eltern / Erziehungsberechtigte für außerschulische Unterstützung entscheiden – um eine Zusammenarbeit mit externen Dyskalkulie-Therapeut/inn/en zur bestmöglichen Unterstützung des Kindes bemüht.

6 Populäre didaktische Irrtümer im Rechenunterricht der Primarstufe: Woher sie wohl kommen, wohin sie führen

„Fingerrechnen ist schlecht“
Das Rechnen mit den Fingern ist oft deswegen verpönt, weil sich an diesem, besonders wenn es sich über das 1. Schuljahr hinaus hält, das zählende Rechnen festmachen lässt. Also wird im Laufe der 1. Klasse den Kindern gesagt, sie sollten das Fingerrechnen lassen, weil jetzt schon das Rechnen im Kopf gewünscht sei. Für die Kinder bedeutet dieses Verbot oft die Verlagerung des Fingerrechnens in den Kopf oder an unsichtbare Stellen (wie die Zehen). Das zugrunde liegende rein ordinale „weiter und zurück“ Zählen wird von so einem Verbot aber nicht positiv beeinflusst, vielmehr wird das zählende Rechnen ohne Finger nur noch schwieriger.

Fachlich muss beim Gebrauch der Finger zwischen der dynamischen (Weiterzählstrategie) und der statischen (Fingerbilder) Verwendung der Finger unterschieden werden, wobei das Weiterzählen die Konzentration auf die Strukturen verhindert, während die Fingerbilder das strukturierte Material sind, das man immer dabei hat (vgl. Gaidoschik, 2002).

„Klein(st)e Schritte sind beim Zahlenaufbau vor allem für schwächere Schüler nötig“
In fast allen in Österreich verwendeten Rechenbüchern[18] für die 1. Klasse wird ein sehr langsamer Aufbau der Zahlen im Anfangsunterricht praktiziert. Dabei werden die einzelnen Zahlen eingeführt und mit den dazugehörigen Rechnungen geübt. Meist dauert es bis zum Jahreswechsel, bis der Zahlenraum 10 erreicht wird, nachdem zuvor die „Zahlenräume 4, 5, 6, 7, 8, 9“ gelernt wurden. Die Vorstellung dahinter geht davon aus, dass Kinder nicht durch zu große Zahlen überfordert werden dürfen und es sich bei den Rechnungen um isolierte Fakten handelt, die man sich einzeln merken soll und kann. Das entspricht nicht im Geringsten den didaktischen Auffassungen der letzten Jahrzehnte. Am Beginn des Rechnens sollte die ganzheitliche Erarbeitung zumindest des Zahlenraums 10 (noch besser des Zahlenraums 20) stehen, da strukturelle Zusammenhänge erst im Rahmen der Zehnerstruktur sicht- und nutzbar werden. In der herrschenden

18 Die einzigen Ausnahmen sind: Die Matheprofis und das Zahlenbuch

Praxis werden mathematische Zusammenhänge von Anfang an nicht genutzt und der Aufbau nicht zählender Strategien damit nicht begünstigt.[19] Zählendes Rechnen ist die naheliegende Methode in den kleinen Zahlenräumen und muss daher später wieder „abgewöhnt“ werden. Die Hoffnung der Verfechter der kleinschrittigen Methode ist, dass die „Rechensätzchen“ direkt automatisiert werden könnten, was in der Praxis so meist nicht funktioniert.

„Null ist nichts“

Allzu häufig wird Kindern erklärt: „Null ist nichts. Da brauchst du nicht zu rechnen.“ Diese alltagssprachliche Übersetzung entspricht auch der unmittelbaren Anschauung. Wenn ich von einem Apfel einen Apfel wegnehme, ist ja tatsächlich nichts auf dem Tisch. Mathematisch wäre hier die 0 besser mit „kein Apfel“ übersetzt, weil diese Definition der 0 die zugrunde liegende Kategorie nicht mit auslöscht. Das „0 = nichts“ Konzept verursacht bald Probleme. Schon bei den ganzen Zehnern führt es zu großer Verwirrung, weil Kinder dann z. B. 20 als „vorne 2, hinten nichts“ auffassen könnten anstatt als „2 Zehner, kein Einer“.

„Formales Rechnen in Gleichungsform ist das ‚eigentliche‘ Rechnen“

„Jetzt haben wir das + Zeichen eingeführt und beginnen mit dem wirklichen Rechnen“. Solche Aussagen kann man in Schulen häufig zu hören bekommen. Die Reduktion von Komplexität scheint das dahinterliegende Motiv zu sein, denn Erwachsene ziehen sich hier auf etwas zurück, das sie selbst ganz leicht können: zu den Rechnungen das passende Ergebnis zu nennen (Rechenfakten im 1+1). Im Grunde ist die Überbewertung der formalen Rechnungen mit der Hoffnung verbunden, dass man sich die Rechnungen in dieser Form leicht merken kann, denn als Erwachsener merkt man, dass man z. B. bei 3 + 4 = 7 „nicht rechnet“, sondern dieses Faktum ja direkt abruft. Dass das Einspeichern nicht auf dem gleichen direkten Weg funktioniert, könnte beim Versuch 121 siebenstellige Nummerncodes zu lernen (denn so viele Additionsfakten im Zahlenraum 20 gibt es) leicht überprüft werden. Der Nachteil der Betonung des formalen Rechnens besteht im Zerreißen von mathematischen Zusammenhängen (Rechenzettel) und der einseitigen Betonung des Übens von (oft nicht verstandenen) Rechensätzen.

19 Dieses kleinschrittige Vorgehen sieht man im Rechenunterricht immer wieder: bei den Rechnungen mit zweistelligen Zahlen, bei den schriftlichen Verfahren etc. Auch hier hat es im Grunde negative Folgen. Beispiel: im Zahlenraum 100 werden die zweistelligen Additionen so aufgebaut: 2 ganze Z addieren (20 + 30), einen ganzen Z und einen gemischten Z addieren (20 + 32), zwei gemischte Z addieren (23 + 32), zwei gemischte Zehner mit Zehnerübergang addieren (25 + 37). Kinder, die dies so lernen, konzeptualisieren das häufig so: Bei 2 ganzen Z muss nur „links“ zusammenrechnen und dann die 0 dranhängen (20 + 30), dann kommt dazu, dass ich das linke rechnen und rechts die Zahl anschreiben muss (20 + 32), dann muss ich links und rechts einzeln zusammenzählen (23 + 32). Sobald dann der Zehnerübertritt „dazu“ kommt, erscheinen zwangsläufig die Fehler der Art 25 + 37 = 52, da die Kinder über Wochen von links nach rechts zu rechnen gelernt haben.

„Es braucht nur das richtige Material / Hilfsmittel, vor allem für die schwächeren Kinder"
Wenn die Erarbeitungsmaterialien vor allem zur Unterstützung schwächerer Kinder verwendet werden, werden diese oft nicht zum Entdecken von Strukturen und Mustern und damit von Zusammenhängen genutzt, sondern den Kindern als Zählhilfen gegeben. Für diesen Zweck kann jedes Material **auch** genutzt werden. Materialien müssen das mathematische Modell, das die Kinder erwerben sollen, auch sichtbar machen, darüber hinaus ist das Wesentliche jedoch der Umgang des Kindes mit dem Material. Strukturen sind nicht von sich aus im Material enthalten, sondern müssen vom Menschen aktiv in die Anordnung „hinein"gesehen oder vielmehr „hinein"gedacht werden. Da Erwachsene Strukturen des Materials meist auf einen Blick entdecken, können sie sich schwer vorstellen, dass Kinder das gerade nicht können. Auch das geeignetste Material macht an sich nichts, erst der forschende und entdeckende Umgang des Kindes und die Kommunikation darüber macht es wertvoll. Meist werden auch strukturierte Materialien zum „Alles zählen" verwendet. Da dann das Ergebnis oft richtig ist, halten Erwachsene das für einen Erfolg.

„Der Zahlenstrahl ist zum Rechnen geeignet"
Besonders für Kinder, die sich mit dem Rechnen schwer tun, wird immer wieder der Zahlenstrahl als Mittel zur Wahl empfohlen. Ein nummerierter Zahlenstrahl ist sehr gut zur Orientierung im Zahlenraum geeignet (Wo befindet sich z. B. 45). Wenn er zum Rechnen verwendet wird, konzeptualisiert er das „Alles-Zählen", denn auf ihm ist nur zählendes Rechnen möglich. Der Grund für diese zweifelhafte Empfehlung ist, dass mit Hilfe des Zahlenstrahls schwache Rechner auch in größeren Zahlenräumen, die fürs Zählen nicht mehr geeignet sind, richtige Ergebnisse erzielen können.

Da Erwachsene einen „inneren Zahlenstrahl von links nach rechts" beim Kopfrechnen benützen, meinen sie, die Kinder sollten diesen von Anfang an als Veranschaulichung nutzen. Der innere Zahlenstrahl der Erwachsenen ist eine innere Modellvorstellung, die aus Zahlenraumvorstellungen und vielfältiger Rechenpraxis resultiert, nicht direkter Lerngegenstand. Der innere Zahlenstrahl dient einer groben Abschätzung der Positionen und Bewegungen im Zahlenraum. Der in der Schule für die Kinder verwendete Zahlenstrahl ist nummeriert und zwingt deshalb bei Rechenvorgängen zum Abzählen und verfestigt das zählende Rechnen und die einseitig ordinale Zahlenvorstellung der rechenschwachen Kinder. Diese Ausführungen gelten analog für das Rechnen an der Hundertertafel.

„Zehnerübergang nur mit dem Teilschrittverfahren"

In vielen Rechenbüchern wird für den Zehnerübertritt vorrangig das Teilschrittverfahren (zuerst zum 10er und dann darüber) unterrichtet. Da Erwachsene Zehnerübertritte in größeren Dekaden (z. B. 78 + 5) in der Regel mit dem Teilschrittverfahren machen, halten sie es – auch mit einer gewissen Berechtigung – für das universal anwendbare Verfahren. Für Kinder, die die Partnerzahlen (ergeben zusammen 10) und die Zahlenzerlegungen im Zahlenraum 10 sehr gut können, stellt das Teilschrittverfahren eine gute Lösung dar. Für Kinder, die diese Voraussetzungen nicht mitbringen, stellt es eine formalisierte Überforderung dar, die dann meist zählend bewältigt wird. Andere nicht zählende Strategien über den Zehner wie Kraft der 5, Verdoppeln +1, 5er- und 10er-Vorteil, 9er-Trick ermöglichen den Kindern mit quantitativen Vorstellungen verknüpfte Verfahren zu automatisieren. Für zählende Rechner ist das Zehnerstoppverfahren eine zusätzliche Erschwernis.

„Rechenfakten werden durch viel Üben von (formalen) Rechnungen gebildet"

Da die Erwachsenen über die Rechenfakten des kleinen 1+1 und des 1×1 verfügen und gewöhnlich nicht wissen, wie diese gebildet werden, nehmen sie diesen einfachen mechanischen Vorgang an. Rechenschwache Kinder versuchen tatsächlich sich die formale Rechnung vorzustellen, wenn sie gefragt werden, was sie beim Rechnen denken. Dies schneidet jedoch die Bedeutung der Rechnung ab und verhindert, dass Zusammenhänge sichtbar und fürs Ableiten und nachherige Automatisieren genützt werden können. Mechanisches Üben von Unverstandenem ist unsinnig. Vielmehr soll Üben und Wiederholen der Konsolidierung und Automatisierung von inhaltlich erfassten Zusammenhängen dienen.

Literatur

Gaidoschik, M. (2002). Rechenschwäche – Dyskalkulie. Eine unterrichtspraktische Einführung für LehrerInnen und Eltern. Wien: öbv&hpt.

7 Qualitätskriterien für außerschulische Förderangebote

Eine unterrichtsergänzende außerschulische Förderung des Zahlenverständnisses und der Rechenleistungen mag angezeigt sein, wenn der Entwicklungsstand eines Kindes bereits stark von der Leistung seiner Klasse abweicht und die schulischen Fördermaßnahmen schon zur Gänze ausgeschöpft wurden.

Die Behandlung von Rechenschwierigkeiten soll didaktisch so aufgebaut werden, dass grundlegende mathematische Defizite aufgearbeitet werden können. Das Erarbeiten von Sinnzusammenhängen mathematischer Konzepte muss hierarchisch erfolgen und baut auf Verständnis von Mengen, Strukturen und Zahlen auf. Der Aufbau von Verständnis ist unbedingt erforderlich und braucht Zeit.

Wie ist es nun möglich, die Spreu vom Weizen zu trennen und aus der Fülle der Förderangebote jene herauszufinden, die auf dem aktuellen Erkenntnisstand basieren?

Folgende Kriterien können als Entscheidungshilfe dienen:

- Wer führt die Förderung durch?
  - Wie gut ist die Förderinstitution in das regionale pädagogisch-psychologische Netzwerk möglicher Unterstützungsmaßnahmen eingebunden? Wird ein Austausch mit Schulen, Schulpsychologie, Diversitätsmanager/inne/n, Kinderärztinnen/-ärzten usw. gepflegt?
  - Hat die fördernde Person eine einschlägige Ausbildung an einer Universität oder pädagogischen Hochschule absolviert? Auch private Anbieter/innen verleihen Diplome, die aber nicht immer einer pädagogisch-psychologischen Qualitätskontrolle unterliegen und manchmal von sehr geringem Umfang sind. Personen, die eine Rechenförderung durchführen, müssen über eine pädagogisch-psychologische Grundausbildung verfügen.

- Differenzierte Feststellung des derzeitigen Entwicklungsstandes als Voraussetzung für eine gezielte Förderung:
  - Wird eine detaillierte Erhebung der aktuellen Kompetenzen und Schwierigkeiten im Bereich Zahlenverarbeitung und Rechenleistungen sowie der allgemeinen kognitiven Entwicklung angeboten?

- – Werden dafür standardisierte diagnostische Verfahren eingesetzt, die eine objektive und zuverlässige Einschätzung des Entwicklungsstandes im Rechnen ermöglichen?
- – Werden die Ergebnisse dieser Diagnostik mit den Eltern in nachvollziehbarer Art und Weise besprochen und schriftlich dokumentiert, sodass sie für Lehrpersonen und Fachkolleginnen und -kollegen nachvollziehbar sind?

- Transparenz und Qualität der Förderinhalte:
  - – Erkundigen Sie sich, ob die eingesetzten Förderprogramme und -methoden evidenzbasiert sind. Damit ist gemeint, dass ihre Wirksamkeit in wissenschaftlich kontrollierten Studien belegt sein soll.[20] Wissenschaftliche Evidenz für die Wirksamkeit liegen bisher ausschließlich für Programme vor, die sich inhaltlich vor allem mit Zahlen und Rechnen befassen (vgl. Ise, Dolle, Pixner & Schulte-Körne, 2012).
  - – Für Trainings, die auf die Verbesserung allgemeiner kognitiver Teilleistungen wie akustische und visuelle Differenzierung, Serialität oder Intermodalität abzielen, ohne dass an Zahlenmaterial geübt wird, liegen keine Wirksamkeitsbelege vor, sie sind also nicht evidenzbasiert.
  - – Auch allgemeine Konzentrations- und Gedächtnisübungen können die Leistungen in Mathematik nur dann verbessern, wenn bei einem Kind Auffälligkeiten in der Konzentrationsleistung vorliegen, die über den Mathematikunterricht (und die dazugehörigen Hausübungen) hinausgehen. Als evidenzbasierte Programme zur Verbesserung der Rechenleistung gelten sie ebenfalls nicht.
  - – Zahlen und Rechnen sollen also den Schwerpunkt der Förderung darstellen: Ein maßgeschneidertes Förderprogramm unterstützt das Kind beim Aufbau des Zahlenverständnisses und zerlegt die zu erlernenden Rechenprozesse in kleine, gut strukturierte Schritte.

- Eine realistische Planung der Förderung (Zeitfenster)
  - – Auf welchen Zeitraum wird die Förderung angelegt? „Schnellheilungsversprechen“ sind mit Vorsicht zu betrachten. Je nach Schweregrad der Schwierigkeiten kann eine Förderung der Rechenleistungen mehrere Monate bzw. Jahre in Anspruch nehmen.

---

20 Falls es Sie interessiert, können Sie darum bitten, dass Ihnen derartige Studien zugänglich gemacht und erläutert werden. Diese Studien sollen (1) in einer wissenschaftlichen Fachzeitschrift veröffentlicht sein (weil hier ein Begutachtungssystem durch Fachkolleg/inn/en gewährleistet, dass die Studie wissenschaftlichen Kriterien entspricht), (2) die Leistung einer Gruppe von Kindern mit Rechenschwierigkeiten vor und nach der Förderung genau berichten (Vor-/Nachtestdesign) und (3) die Leistungssteigerung der Trainingsgruppe soll größer ausfallen als die einer untrainierten Kontrollgruppe.

- In welchen Abständen finden die Fördereinheiten statt? Je nach Alter des Kindes sollten 1–2 Förderstunden pro Woche angeboten werden.
- Was muss zu Hause gemacht werden, wer soll das Kind beim Lernen daheim unterstützen? Es ist wichtig, das Kind nicht zu überfordern und die täglichen Übungseinheiten auf max. 15 bis 20 Minuten zu beschränken. Die Person, die die häuslichen Übungseinheiten durchführt, sollte in der Lage sein, die Motivation des Kindes dauerhaft aufrecht zu erhalten.
- Erholungspausen einplanen! Dies gilt insbesondere für Wochenenden und Ferienzeiten. Hier brauchen Kinder Auszeiten, die mit Spaß und Spiel ausgefüllt sind und in denen Schulprobleme nicht vorkommen. Ein Tag in der Woche soll lernfrei bleiben, bei längeren Ferien sollte mehr als die Hälfte der freien Tage als Erholung genützt werden.

- Überprüfung des Fortschrittes (Verlaufsdiagnostik)
  - Werden kurzfristige Ziele (1–3 Monate) gesetzt und Leistungsfortschritte gezielt überprüft?
  - Werden zur Überprüfung der Lernfortschritte standardisierte Verfahren eingesetzt?
  - Werden Erfolge, aber auch Misserfolge analysiert, mit Eltern und Kindern besprochen und bei der weiteren Planung geeignet berücksichtigt?

- Die Rahmenbedingungen
  - Gibt es einen geeigneten ruhigen Raum für die Förderung?
  - Findet die Förderung im Einzelsetting statt, sodass sie individuell erfolgen kann?
  - Wenn Übungseinheiten von den Eltern durchgeführt werden sollen: Sind diese so vorbereitet, dass sie nicht dem „üblichen Hausübungsfrust“ zum Opfer fallen?
  - Gibt es regelmäßige Elterngespräche über den Ist-Stand, den Verlauf und das Befinden des Kindes?
  - Gibt es einen Austausch mit der Schule bezüglich der Förderinhalte und des Förderverlaufs?

Förderung bei Rechenschwäche braucht zusätzlich zu wirksamen Förderkomponenten Planung, Ausdauer und Vernetzung mit allen am Lernprozess beteiligten Personen.

Glossar

analoger Zahlencode / analoge Mengenrepräsentation
Dieser spielt bei der Bedeutung von Zahlen eine große Rolle. Sowohl die Anzahl von Elementen (z. B. Punktmengen) als auch die Positionierung an einem inneren Zahlenstrahl wird im analogen Code dargestellt.

arabisches Zahlenwissen
Wissen um die Zahlen in Form von Ziffern (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, …)

Automatisieren
Vorgänge so gut einüben, dass sie ohne großen Denkaufwand (automatisiert) abgerufen werden können, siehe auch Rechenfakten

basal
grundlegend

Differenzierung
Unterschiedliche Angebote an die Lernenden entsprechend deren Lernausgangslage und Lernvoraussetzung

Dyskalkulie
(Erhebliche) Schwierigkeiten beim Rechnen Lernen (auch Rechenstörung, Rechenschwäche).

Eins-zu-Eins-Zuordnung
Zuordnen von Elementen einer Menge zu Elementen einer anderen. Bedeutsam auch beim Abzählen, wo jedem Element ein Zahlwort zugeordnet wird.

Individualisierung
Umgang mit Heterogenität in Schulklassen. Auf die individuellen Möglichkeiten der Kinder abgestimmtes Vorgehen.

Intervention
Maßnahme, die gesetzt wird

Kardinalzahl
bezeichnet die Mächtigkeit einer Menge

Kompetenz
Zusammenspiel von Fähigkeiten und Fertigkeiten, wodurch situationsgerechtes Handeln oder Problemlösen möglich wird.

Kraft der 5
Kraft der Fünf: 5 wird als Einheit gedacht („volle Hand“). Die Strategie „Kraft der Fünf“ eignet sich für alle Aufgaben, bei denen beide Summanden größer / gleich 5 sind. (z. B: 7 + 8) Verdoppeln + 1: Da die Verdoppelungen leicht zu merken sind, wird von diesen abgeleitet (z. B: 7 + 7 à 7 + 8)
5er und 10er Vorteil: „ganze Hand dazu“ oder „zwei Hände dazu“. (z. B: 7 + 5 = 5 + 2 + 5 = 10 + 2)
9er Trick: „ganzer Zehner dazu minus 1.“ (z .B: 5 + 9 = 5 + 10 - 1)

Lernumgebungen, substanzielle
In ihnen haben die Kinder vielfältige Bearbeitungsmöglichkeiten in verschiedenen Fähigkeitsniveaus zu zentralen Zielen der Mathematik. Sie tragen zur Differenzierung bei.

mathematische Konzepte
Zahl- und Operationsmodelle, die im Hintergrund der Rechenvorgänge wirken

mathematische Vorläuferfähigkeiten
Vorerfahrungen mit Mengen und Zahlen als Basis, um Rechnen zu lernen

Mengenkonstanz
Eine abgezählte Menge kann – ohne nochmals gezählt zu werden – richtig benannt werden.

Mengenstrukturierung
Fähigkeit, Strukturen in Mengen und Zahlen zu erkennen und für Rechenprozesse zu nutzen, siehe auch Teil-Ganzes-Konzept.

Ordinalzahl
bezeichnet die Position in einer Reihenfolge: 5 = die fünfte Murmel, die gezählt wurde

Partnerzahlen
Zahlenpaare, die zusammen 10 ergeben (1 + 9, 2 + 8, 3 + 7, 4 + 6, 5 + 5)

Rechenfakten
„Kopfrechnungen“, die kompetente Rechner aus dem Gedächtnis direkt abrufen können (v. a. 1+1 im Zahlenraum 20 und kleines 1 × 1)

Rechen-Operationen
Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren

Rechenprozeduren
Wissen um Vorgehensweisen bei Rechenoperationen (z. B. die Algorithmen des schriftlichen Rechnens mit mehrstelligen Zahlen)

Relationalzahl
Abstand oder Unterschied zwischen zwei Zahlen (z. B. 5 ist um 3 mehr als 2. 3 fungiert hier als Relationalzahl)

Sekundärproblematik
Probleme, die als Folge einer vorangehenden Problematik auftreten

simultane Mengenerfassung = Subitizing
schnelles Erfassen der Anzahl von Dingen, ohne diese abzählen zu müssen. Dies ist bis zu einer Menge von vier Elementen möglich. Gelingt es, größere Mengen „auf einen Blick“ zu erfassen, so spricht man von „Quasi-Simultanerfassung“. Dies gelingt durch schnelle Strukturierung der vorgegebenen Menge.

Teil-Ganzes-Konzept
Verständnis dafür, dass eine Gesamtmenge in mehrere Teilmengen aufgliedert werden kann und dass Mengen aus (kleineren) Mengen bestehen.

Triple-Code-Modell
neurokognitives Modell der Zahlenverarbeitung, das die Vernetzung unterschiedlicher Auftretensformen von Zahlen (analog / Zahlwörter / arabische Zahlen) betont (Dehaene, 2012), siehe auch Analoger Zahlencode

zählendes Rechnen
Rechenstrategie, die Addition und Subtraktion als ein Dazu- und Wegzählen (oft an den Fingern) praktiziert

Notizen